

Standaardisatie van componenten:

**Voorraadkosten nader beschouwd in
een specifiek geval**

**Willem-Jan van der Zanden
ANR: 974102**

**Begeleider:
R.M.J. Heuts**

Inhoudsopgave

1.	Inleiding.....	3
Hoofdstuk 2: Het Basis Model		
2.1	Het Basis Model met ongecorrleerde vraag.....	5
2.2	Resultaten van het Basis Model met ongecorrleerde vraag.....	6
2.3	Het Basis Model met gecorrleerde vraag.....	8
2.4	Het Basis Model met positief gecorrleerde vraag.....	9
2.5	Het Basis Model met negatief gecorrleerde vraag.....	13
Hoofdstuk 3: Het Commonality Model		
3.1	Het Commonality Model met ongecorrleerde vraag.....	17
3.2	Resultaten van het Commonality Model met ongecorrleerde vraag.....	18
3.3	Het Commonality Model met gecorrleerde vraag.....	20
3.4	Het Commonality Model met positief gecorrleerde vraag.....	20
3.5	Het Commonality Model met negatief gecorrleerde vraag.....	22
Hoofdstuk 4: Het Double Commonality Model		
4.1	Het Double Commonality Model met ongecorrleerde vraag.....	28
4.2	Resultaten van het Double Commonality Model ongecorrleerd.....	28
4.3	Het Double Commonality Model met gecorrleerde vraag.....	30
4.4	Het Double Commonality Model met positief gecorrleerde vraag.....	30
4.5	Het Double Commonality Model met negatief gecorrleerde vraag.....	31
Hoofdstuk 5: Kostenanalyse		
5.1	Kostenvergelijking Modellen met ongecorrleerde vraag.....	31
5.2	<i>Kostenvergelijking Modellen met negatief gecorrleerde vraag.....</i>	
Hoofdstuk 6: Kostenvoorbeeld		
6.1	Kostenvoorbeeld met ongecorrleerde vraag.....	33
6.2	<i>Kostenvoorbeeld met negatief gecorrleerde vraag.....</i>	
Literatuuropgave.....		36
Appendix A: Modelberekeningen.....		37
Appendix B: Kostenberekeningen.....		51
Appendix C: MATLAB-programma's.....		57

1. Inleiding

Door de toename van het aantal varianten van producten vanaf de jaren tachtig is het onderwerp “standaardisatie van componenten” steeds meer in de belangstelling komen te staan. Meer varianten van producten leiden over het algemeen ook tot meer componenten. Hierdoor wordt het productieproces complexer en zullen ook de voorraden gaan stijgen. Een manier om het aantal componenten te verminderen is om gebruik te maken van standaardisatie van componenten. Meerdere componenten worden nu door één gezamenlijke component vervangen. Deze gezamenlijke component is over het algemeen duurder dan de afzonderlijke componenten, die hij vervangt. Het vervangen van componenten kan op een drietal manieren:

- A. Het vervangen van een aantal componenten in een product door één gezamenlijke component;
- B. Het vervangen van een aantal componenten in verschillende producten door één gezamenlijke component;
- C. Het gebruik van gezamenlijke componenten in een product in de loop van de tijd.

Het gebruik van gezamenlijke componenten kan leiden tot kostenbesparingen op de volgende onderdelen van de levenscyclus van het product:

1. Productontwikkeling:

Door standaardisatie neemt het aantal componenten, dat ontwikkeld moet worden af. Wel zullen de gezamenlijke componenten hogere ontwikkelingskosten hebben dan de afzonderlijke componenten, die ze vervangen. Bij verbetering van het product moeten verder zoveel mogelijk bestaande componenten worden hergebruikt in plaats van het ontwikkelen van volledig nieuwe.

2. Productieproces:

a. Materiaal:

Door de afname van het aantal componenten kan ook bespaard worden op het ruwe materiaal waaruit deze componenten bestaan (indien het bedrijf de componenten zelf maakt). Een kleiner aantal componenten leidt per saldo tot een grotere vraag per component. Hierdoor kan het aantal toeleveranciers beperkt worden en kan het bedrijf vaak korting bedingen.

b. Productiefaciliteiten:

Standaardisatie van componenten leidt ook tot standaardisatie van productiefaciliteiten zoals machines en magazijnen. Er zijn immers minder verschillende machines nodig.

c. Productiekosten:

- Werknemers hoeven minder verschillende handelingen uit te voeren. Volgens Perara et al. (1999) leidt dit tot een efficiëntere leercurve. Meer herhalingen leiden efficiënter leren. Doordat er minder handelingen zijn wordt het aantal onderbrekingen (de werknemer begint met een andere handeling) minder. Ook dit leidt tot efficiënter werken.
- Minder componenten leiden tot minder set-ups. De “down-time” van een machine zal hierdoor afnemen.

3. Distributie:
 - a. Voorraadkosten:
 - Het totaal aantal componenten in voorraad neemt af;
 - De voorraad van de gezamenlijke component is kleiner dan de totale voorraad, van de twee componenten, die hij vervangen heeft.
 - Het voorraadniveau van de specifieke component is toegenomen.De bovenstaande drie beweringen gelden voor een situatie met twee producten, die elk twee componenten hebben. In de hoofdstukken 5 en 6 wordt hierop verder ingegaan.
 - b. Beschadigde componenten:

Door de afname van het aantal componenten neemt de kans dat een beschadigde component vervangen kan worden toe.
4. Productgebruik:

Minder componenten leiden tot minder kosten bij reparaties. Reparateurs kunnen sneller werken door het kleinere aantal componenten, het product is minder complex en reparateurs hebben dus minder scholing nodig. Ook hoeft het bedrijf minder componenten als reserve op voorraad te houden. Verder neemt.
5. Recycling:

Bedrijven worden tegenwoordig steeds meer wettelijk verplicht om producten te recyclen en/of terug te nemen na gebruik. Standarisatie van componenten zal ook op dit gebied leiden tot minder kosten.

Het bovenstaande overzicht geeft kort (maar niet volledig) weer op welke terreinen er besparingen mogelijk zijn als van gezamenlijke componenten gebruik wordt gemaakt. In deze derdejaarscriptie zal vooral op punt 3a worden ingegaan. Er zal een model opgezet worden van twee producten met elk twee componenten. In de eerste variant zal de vraag van deze twee producten niet gecorreleerd zijn. In de tweede variant bestaat er een correlatie tussen de vraag naar beide producten. Na een uitleg van het model zullen er formules afgeleid worden voor het voorraadniveau in de verschillende varianten van het model. Hierna worden voorwaarden opgesteld waaronder een bepaalde variant van het model voordelig is. De derdejaarscriptie wordt afgesloten aan de hand van een voorbeeld.

Het model dat in deze derdejaarscriptie gebruikt wordt is op het eerste gezicht een zeer eenvoudig model. Twee producten met elk twee componenten en een uniforme vraagverdeling. Ook dit eenvoudige model leidt echter al tot vrij ingewikkelde berekeningen en simulaties. Dit model is dan ook geen weergave van de veel complexere werkelijkheid. Het geeft enkel voor een specifiek geval weer in welke mate er kostenbesparingen te bereiken zijn door het gebruik van gezamenlijke componenten. Het model zou meer realistisch gemaakt kunnen worden door complexere producten en/of het gebruik maken van een realistischere verdeling. Hierbij zou gedacht kunnen worden aan een normaal of gamma-verdeelde vraag. Bij een normaal verdeelde vraag zijn expliciete oplossingen echter niet aanwezig en zal van simulatie gebruik gemaakt moeten worden.

2. Het Basis Model

De eerste opzet naar het eindmodel, zoals beschreven in de inleiding, wordt gegeven door het eenvoudige basismodel. In dit basismodel staat een productieproces met twee eindproducten centraal. Elk van deze eindproducten wordt geproduceerd d.m.v. twee componenten. In paragraaf 2.1 wordt het basismodel uiteengezet, waarin de vraag van deze beide eindproducten niet gecorreleerd is. In paragraaf 2.2 volgt dan een afleiding van de beslissingsvariabelen van het model. Hierbij zal een afleiding volledig worden weergegeven in de Appendix. Van de overige afleidingen worden enkel het model en de belangrijkste stappen in de berekening in de Appendix genoemd. Hierna wordt in paragraaf 2.3 de overstap gemaakt naar het basismodel, waarin de vraag tussen de beide eindproducten gecorreleerd is. In de twee hierop volgende paragrafen worden dan de afleidingen van dit aangepaste basismodel gegeven. In paragraaf 2.4 wordt uitgegaan van een positieve correlatie tussen de vraag van beide eindproducten. In paragraaf 2.5 wordt de correlatie negatief verondersteld.

2.1 Het Basis Model met ongecorreleerde vraag (BO)

In het Basis Model met ongecorreleerde vraag zijn er een tweetal eindproducten. Eindproduct 1 wordt geproduceerd met behulp van één component 3 en één component 4. Eindproduct 2 wordt door één component 5 en één component 6 geproduceerd. Voor het Basis Model met ongecorreleerde vraag worden de volgende aannamen gebruikt:

1. De vraag van beide eindproducten is uniform verdeeld;
 - De vraag van eindproduct 1 (D_1) is $U(0, b_1)$ verdeeld.
 - De vraag van eindproduct 2 (D_2) is $U(0, b_2)$ verdeeld.
2. Er worden geen restricties opgelegd aan de kosten van de componenten;
3. Het bedrijf wil voldoen aan een vooraf vastgesteld serviceniveau $\exists$ met een waarde tussen 0 en 1. Dit service niveau wordt gedefinieerd als de kans dat aan de vraag van beide producten kan worden voldaan. Aan het service niveau wordt voldaan als geldt dat: $ASL \exists \exists$. Hierbij is ASL de afkorting voor "Aggregate Service Level"¹

De optimale oplossing van het Basis Model met ongecorreleerde vraag kan nu gevonden worden door de totale kosten van het aankopen van de componenten te minimaliseren onder de voorwaarde, dat aan het vastgestelde serviceniveau wordt voldaan. Hiervoor wordt het volgende model gedefinieerd:

$$\text{Min } T_{BO} = c_3 S_3 + c_4 S_4 + c_5 S_5 + c_6 S_6$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & ASL \exists \exists \\ & S_3, S_4, S_5, S_6 \geq 0 \end{aligned}$$

¹ Met behulp van de verklaarde variabelen en aanname 1 op bladzijde 3 wordt ASL als volgt gedefinieerd: $ASL = P(D_1 \leq S_3) \cap P(D_2 \leq S_6)$. ASL is dus de kans dat de vraag naar eindproduct 1 kleiner is dan de vraag naar de componenten nodig voor eindproduct 1 en dat de vraag naar eindproduct 2 kleiner is dan de vraag naar de componenten nodig voor eindproduct 2.

Met: c_i = kosten van component i
 S_i = voorraad van component i in model BO
 ASL = Aggregate Service Level
 $\exists$ = vastgesteld service niveau
 T_{BO} = totale kosten van model BO

Voordat tot het berekenen van de optimale oplossing van het bovenstaande model wordt overgegaan kunnen er een aantal vereenvoudigingen aan het bovenstaande model worden opgelegd:

1. Voor eindproduct 1 is steeds één component 3 en één component 4 nodig. In de optimale oplossing zal daarom moeten gelden dat S_3 gelijk is aan S_4 . Het in voorraad houden van ongelijke hoeveelheden van beide componenten zal niet leiden tot een verhoging van het serviceniveau. Op gelijke wijze geldt nu dat S_5 gelijk is aan S_6 .
2. De maximaal mogelijke vraag voor eindproduct 1 is b_1 . Het aanhouden van een grotere voorraad van component 3 dan b_1 heeft dus ook geen gevolgen voor de hoogte van het serviceniveau. Hieruit volgt ook dat S_6 niet groter mag zijn dan b_2 .
3. Met behulp van Figuur 1 kan ASL nu gedefinieerd worden als:
 $ASL = S_3 S_6 / b_1 b_2 = (\exists)^2$
 Doordat het bedrijf de kosten wil minimaliseren zal nooit meer voorraad aangehouden worden dan noodzakelijk is. ASL zal dus gelijk zijn aan het vooraf vastgestelde service niveau $\exists$.

Uit de punten 1 tot en met 3 volgt het volgende aangepaste model:

$$\text{Min } T_{BO} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t. } \exists = S_3 S_6 / b_1 b_2$$

$$S_3, S_6 \geq 0$$

2.2 Resultaten van het Basismodel met ongecorreleerde vraag

Bij het berekenen van de oplossing van het basismodel BO kunnen een viertal situaties onderscheiden worden. Deze worden weergegeven op de onderstaande vier tekeningen:

$$^2 ASL = P(D_1 \# S_3) \cap P(D_2 \# S_6) = \int_0^{S_3} (1/b_1) dx \wedge \int_0^{S_6} (1/b_2) dy = S_3 / b_1 * S_6 / b_2$$

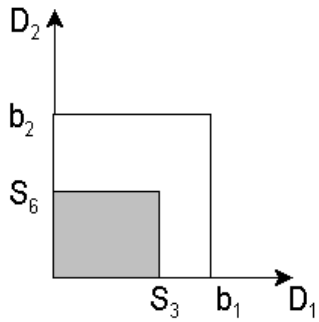


Fig. 1: Basismodel BO (Range 1)

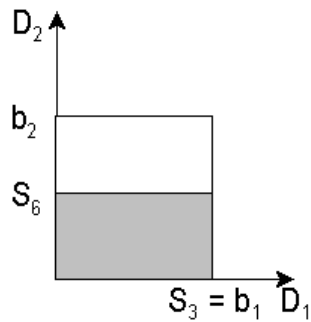


Fig. 2: Basismodel BO (Range 2a)

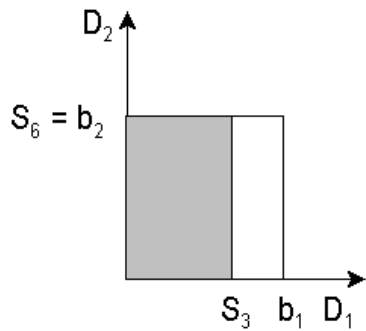


Fig. 3: Basismodel BO (Range 2b)

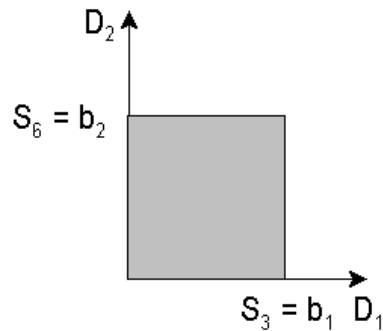


Fig. 4: Basismodel BO (Range 3)

Op basis van de bovenstaande vier tekeningen kunnen voor de vier ranges de volgende voorwaarden worden afgeleid:

Range 1: $S_3 < b_1$ en $S_6 < b_2$ (2.2.1)

Range 2A: $S_3 = b_1$ en $S_6 < b_2$ (2.2.2)

Range 2B: $S_3 < b_1$ en $S_6 = b_2$ (2.2.3)

Range 3: $S_3 = b_1$ en $S_6 = b_2$ (2.2.4)

Uit deze voorwaarden kunnen de boven- en ondergrens van de ranges in $\exists$ berekend worden. De onderstaande figuur geeft weer op welke wijze de verschillende ranges in elkaar overgaan naarmate $\exists$ groter wordt:

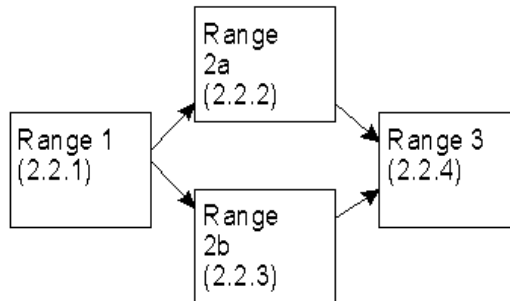


Fig. BO: Ranges van het Basismodel BO

Range 1:

Het Basismodel BO begint in Range 1. Deze range kan op twee manieren verlaten worden:

- S_3 wordt gelijk aan b_1 (Range 2A).
- S_6 wordt gelijk aan b_2 (Range 2B).

Range krijgt nu een bovengrens van de vorm: $\exists < \min(\text{ondergrens 2A, ondergrens 2B})$.

Range 2A:

Range 2A gaat in Range 3 over als S_6 gelijk wordt aan b_2 .

Range 2B:

Range 2B gaat in Range 3 over als S_3 gelijk wordt aan b_1 .

Tabel 1: Resultaten van het Basismodel BO

$$\text{Range 1: } S_3 = \sqrt{\beta b_1 b_2 \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)}} \quad S_6 = \sqrt{\beta b_1 b_2 \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)}}$$

$$\exists \exists 0 \text{ en } \beta < \min\left(\frac{b_1(c_3 + c_4)}{b_2(c_5 + c_6)}, \frac{b_2(c_5 + c_6)}{b_1(c_3 + c_4)}\right)$$

$$\text{Range 2A: } S_3 = b_1, S_6 = \exists b_2$$

$$\beta \geq \frac{b_1(c_3 + c_4)}{b_2(c_5 + c_6)} \text{ en } \exists < 1$$

$$\text{Range 2B: } S_3 = \exists b_1, S_6 = b_2$$

$$\beta \geq \frac{b_2(c_5 + c_6)}{b_1(c_3 + c_4)} \text{ en } \exists < 1$$

$$\text{Range 3: } S_3 = b_1, S_6 = b_2 \text{ en } \exists = 1$$

2.3 Het Basis Model met gecorreleerde vraag (BG)

Bij de berekeningen in paragraaf 2.2 werd de aanname gemaakt, dat de vraag, van de twee eindproducten niet gecorreleerd was. Het laten vallen van deze aanname heeft echter gevolgen voor de uitkomsten van het Basismodel. In paragraaf 2.4 wordt

de aanname gebruikt, dat de vraag van beide eindproducten positief gecorreleerd is. In paragraaf 2.5 wordt van een negatieve correlatie uitgegaan. In het geval van een positieve correlatie, loopt de correlatiecoëfficiënt Δ van 0 (volledig onafhankelijke vraag) tot 1 (volledig positief gecorreleerd). Bij een negatieve correlatie, neemt Δ waarden tussen -1 en 0 aan. Bij een correlatiecoëfficiënt van 0 is elke mogelijke combinatie van vraag in het vierkant $b_1 b_2$ mogelijk, zoals uit de figuren 1 tot en met 4 blijkt. Naarmate de correlatiecoëfficiënt echter toeneemt wordt het gebied binnen het vierkant $b_1 b_2$ dat toegestaan is af. Bij een correlatiecoëfficiënt van 1 zal dit gebied enkel nog een 45 gradenlijn door de oorsprong zijn.

Ook in het Basismodel met gecorreleerde vraag wordt uitgegaan van een situatie waarin twee eindproducten worden geproduceerd. Eindproduct 1 wordt gemaakt met behulp van één component 3 en één component 4. Voor eindproduct 2 zijn één component 5 en één component 6 nodig. Verder gelden de volgende aannames:

1. De vraag van de beide eindproducten heeft een bivariaat uniforme verdeling in het gebied $[0, b] \times [0, b]^3$
2. Aan de kosten van de componenten wordt de volgende restrictie opgelegd.
 $C_3 + C_4 \neq C_5 + C_6^4$
3. Het bedrijf wil voldoen aan een vooraf vastgesteld service niveau $\exists$ met een waarde tussen 0 en 1.

Uitgangspunt is opnieuw om de kosten van de componenten te minimaliseren en daarbij aan het vooraf vastgestelde service niveau te voldoen. Hiervoor moet het volgende model opgelost worden:

$$\text{Min } T_{BG} = C_3 S_3 + C_4 S_4 + C_5 S_5 + C_6 S_6$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} &ASL \exists \exists \\ &S_3, S_4, S_5, S_6 \exists 0 \end{aligned}$$

Vervolgens kunnen de vereenvoudigingen 1 en 2 van het basismodel met ongecorrleerde vraag uit paragraaf 2.1 worden toegepast. Deze leiden tot het aangepaste basismodel voor gecorreleerde vraag:

$$\text{Min } T_{BO} = (C_3 + C_4) S_3 + (C_5 + C_6) S_6$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} &ASL \exists \exists \\ &S_3, S_6 \exists 0 \end{aligned}$$

2.4 Het Basis Model met positief gecorreleerde vraag (BGP)

Afhankelijk van de waarden van S_3 en S_6 bestaan de oplossingen van het Basis Model met positief gecorreleerde vraag uit 6 ranges. Deze worden in de volgende tekeningen weergegeven:

³ Aangenomen wordt $b = b_1 = b_2$ om de berekeningen enigszins te vereenvoudigen.

⁴ Deze aanname is van belang voor het berekenen van de verschillende ranges van het model. Door deze aanname wordt S_3 eerst groter dan x en daarna wordt S_6 pas groter dan x . (De verschillende ranges van het model worden in paragraaf 2.4 behandeld)

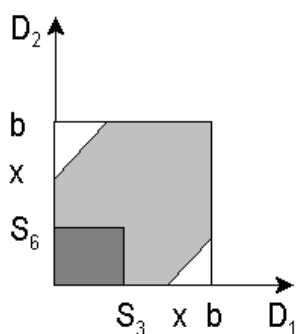


Fig. 5: Basismodel BGP (Range 1)

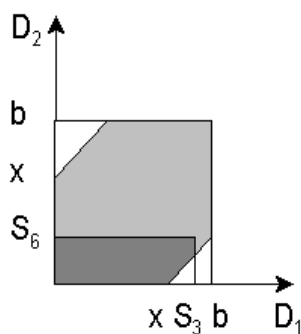


Fig. 6: Basismodel BGP (Range 2)

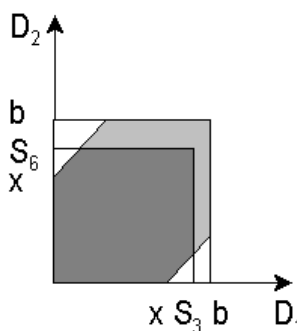


Fig. 7: Basismodel BGP (Range 3A)

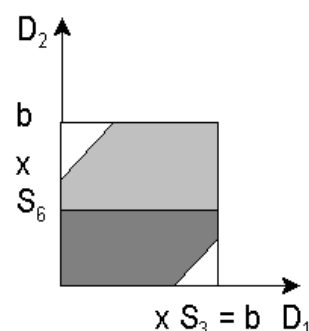


Fig. 8: Basismodel BGP (Range 3B)

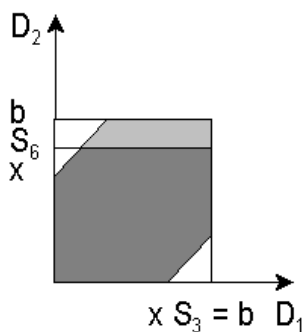


Fig. 9: Basismodel BGP (Range 4)

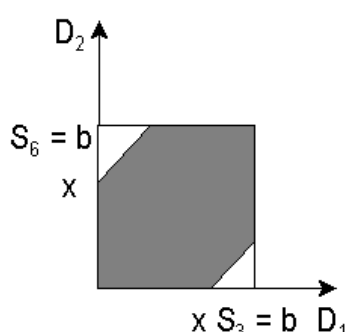


Fig. 10: Basismodel BGP (Range 5)

In vergelijking met de figuren 1 tot en met 5 uit paragraaf 2.2 is het toegestane gebied (het niet witte gedeelte in bovenstaande plaatjes)^{5,6} kleiner. Het kleinere

⁵ Het lichtgrijze gebied (inclusief het donkergrijze deel) wordt gedefinieerd als $A = b^2 - (b - x)^2$. Dit is het gebied van alle combinaties van D_1 en D_2 , die toegestaan zijn.

⁶ Het donkergrijze gebied zijn alle combinaties, die relevant zijn op basis van de gestelde voorwaarden. In figuur 7 is dit $S_3 S_6 - 0.5(S_3 - x)^2 - 0.5(S_6 - x)^2$

toegestane gebied is het gevolg van de correlatie van de vraag van beide eindproducten. Door deze correlatie zijn bepaalde combinaties van de vraag van beide eindproducten niet toegestaan. De omvang van het toegestane gebied wordt weergegeven door het getal A. Het service niveau volgt uit het delen van de oppervlakte van het donkergrijze gebied door de oppervlakte van het lichtgrijze gebied. De waarde van de variabele x kan bepaald worden als de correlatiecoëfficiënt Δ bekend is.⁷

Voor de 6 ranges gelden nu de volgende voorwaarden:

Range 1: $S_3 < x$ en $S_6 < x$ (2.4.1)

Range 2: $S_3 < b$ en $S_6 < x$ (2.4.2)

Range 3A: $S_3 < b$ en $S_6 < b$ (2.4.3)

Range 3B: $S_3 = b$ en $S_6 < x$ (2.4.4)

Range 4: $S_3 = b$ en $S_6 < b$ (2.4.5)

Range 5: $S_3 = b$ en $S_6 = b$ (2.4.6)

Bovenstaande Ranges gaan op de volgende wijze in elkaar over:

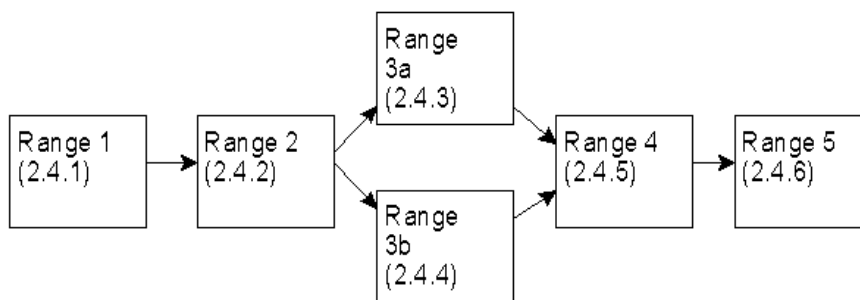


Fig. BGP: Ranges van het Basismodel BGP

Range 1:

Het Basismodel BGP begint in Range 1. Range 1 gaat in Range 2 over als S_3 groter dan x wordt. Op basis van aanname 2 van het Basismodel BG ($c_3 + c_4 \neq c_5 + c_6$) gaat Range 1 over in Range 2. De kosten van de componenten 3 en 4 zijn namelijk gezamenlijk goedkoper, dan die van de componenten 5 en 6 bij elkaar. Hierdoor zal het bedrijf dus eerst de voorraad van S_3 laten toenemen voordat de hoeveelheid van S_6 opgehoogd zal worden.

Range 2:

Range 2 kan op twee manieren verlaten worden:

- S_6 wordt groter dan x . (Range 3A)
- S_3 wordt gelijk b (Range 3B)

⁷ Eynan (1996) geeft de volgende afhankelijkheidsrelatie tussen Δ en x :

$$\rho = -\frac{x^2(3b-x)}{b^3 + b^2x - 2bx^2 + 2x^3}$$

Doordat Range 2 in twee verschillende Ranges kan overgaan ontstaat er een bovengrens van de vorm: $\exists < \min(\text{ondergrens 3A, ondergrens 3B})$.

Range 3A:

Range 3A gaat over in Range 4 als S_3 gelijk wordt aan b .

Range 3B:

Range 3B gaat over in Range 4 als S_6 groter dan x wordt.

Tabel 2: Resultaten van het Basismodel BGP

Range 1: $S_3 = \sqrt{\frac{\beta A}{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}}, S_6 = \sqrt{\beta A \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)}}$

$$\exists \exists 0 \text{ en } \exists \exists cx^2/A \text{ met } c = \frac{c_3 + c_4}{c_5 + c_6}$$

De waarde van S_3 komt niet overeen met de berekende waarde in tabel 1 uit Eynan (1996). Eynan geeft voor S_3 de waarde: $\sqrt{\beta A \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)}}$

Range 2: $S_3 = \sqrt{\frac{\beta A + 0.5x^2}{c + 0.5}}, S_6 = S_3(c+1) - x$
 $\exists \exists cx^2/A \text{ en } \beta < \min\left(\left[4 \frac{c+0.5}{(c+1)^2} - 0.5\right] \frac{x^2}{A}, \frac{b^2(c+0.5) - x^2/2}{A}\right)$

Range 3A: $S_3 = \frac{\beta A}{2x} + 0.5x(1 - F + 0.5F^2), S_6 = S_3 + xF, F = \frac{(c_3 + c_4) - (c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4) + (c_5 + c_6)}$
 $\beta \geq \left[4 \frac{(c+0.5)}{(c+1)^2} - 0.5\right] \frac{x^2}{A} \text{ en } \beta < \frac{xb}{A} \left[2 - \frac{x}{b}(1 - F + 0.5F^2)\right]$

Range 3B: $S_3 = b, S_6 = \frac{\beta A + (b-x)^2/2}{b}$
 $\beta \geq \frac{b^2(c+0.5) - 0.5x^2}{A} \text{ en } \beta < \frac{xb - (b-x)^2/2}{A}$

Range 4: $S_3 = b, S_6 = b + x - \sqrt{4bx - x^2 - 2\beta A}$
 $\exists < 1$
 $\beta \geq \frac{xb}{A} \left[2 - \frac{x}{b}(1 - F + 0.5F^2)\right]$ als 4 de opvolger is van 3A

$$\beta \geq \frac{xb - 0.5(b-x)^2}{A} \text{ als 4 de opvolger is van 3B}$$

Range 5: $S_3 = b, S_6 = b \text{ en } \exists = 1$

2.5 Het Basismodel met negatief gecorreleerde vraag (BGN)

Bij het Basismodel met negatief gecorreleerde vraag is een soortgelijke analyse te maken als bij het Basismodel met positief gecorreleerde vraag. In totaal zijn er bij dit model negen verschillende ranges te onderscheiden:

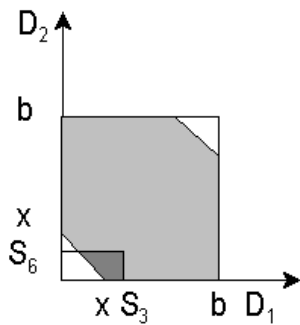


Fig. 11: Basismodel BGN (Range 1)

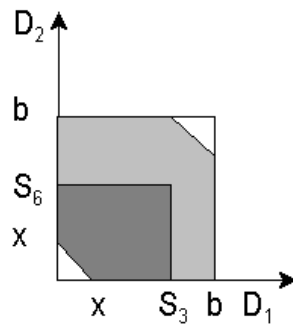


Fig. 12: Basismodel BGN (Range 2A)

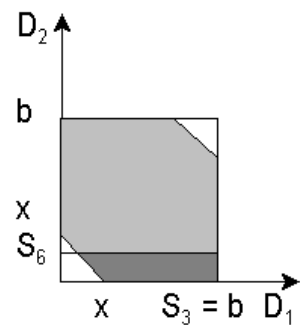


Fig. 13: Basismodel BGN (Range 2B)

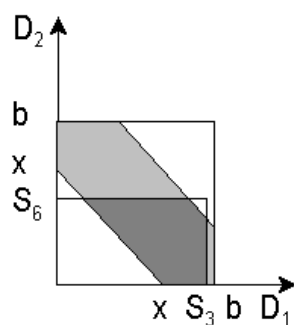


Fig. 14: Basismodel BGN (Range 2C)

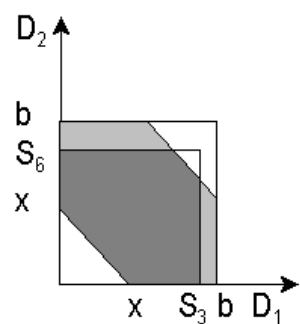


Fig. 15: Basismodel BGN (Range 3A)

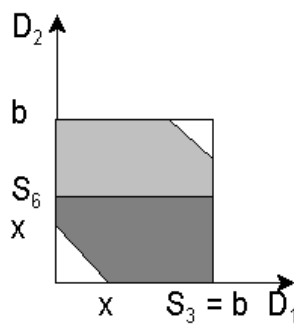


Fig. 16: Basismodel BGN (Range 3B)

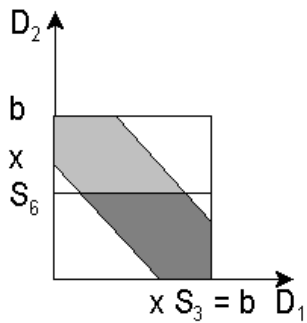


Fig. 17: Basismodel BGN (Range 3C)

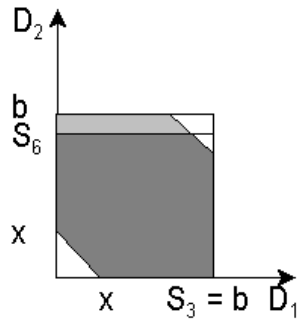


Fig. 18: Basismodel BGN (Range 4)

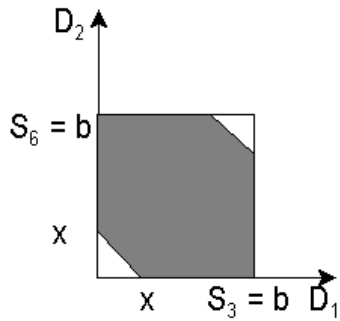


Fig. 19: Basismodel BGN (Range 5)

Voor de bovenstaande 9 ranges gelden nu de volgende voorwaarden:

Range 1: $S_3 < b$, $S_6 < x$ en $S_3 + S_6 < 2b - x$ (2.5.1)

Range 2A: $S_3 < b$, $S_6 < b$ en $S_3 + S_6 < 2b - x$ (2.5.2)

Range 2B: $S_3 = b$, $S_6 < x$ en $S_3 + S_6 < 2b - x$ (2.5.3)

Range 2C: $S_3 < b$, $S_6 < x$ en $S_3 + S_6 \geq 2b - x$ (2.5.4)

Range 3A: $S_3 < b$, $S_6 < b$ en $S_3 + S_6 \geq 2b - x$ (2.5.5)

Range 3B: $S_3 = b$, $S_6 < b$ en $S_3 + S_6 < 2b - x$ (2.5.6)

Range 3C: $S_3 = b$, $S_6 < x$ en $S_3 + S_6 \geq 2b - x$ (2.5.7)

Range 4: $S_3 = b$, $S_6 < b$ en $S_3 + S_6 \geq 2b - x$ (2.5.8)

Range 5: $S_3 = b$, $S_6 = b$ en $S_3 + S_6 \geq 2b - x$ (2.5.9)

De bovenstaande 9 ranges gaan op de volgende wijze in elkaar over:

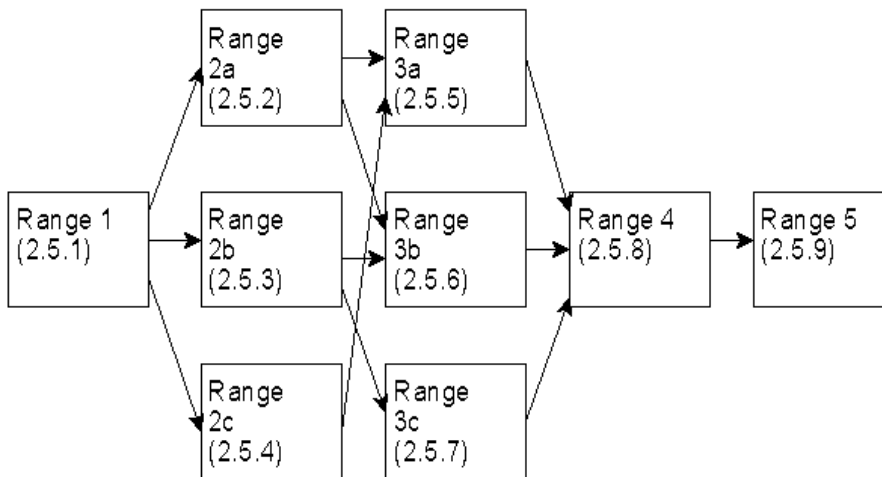


Fig. BGN: Ranges van het Basismodel BGN

Range 1:

Het model begint in Range 1. Deze ranges kan op drie wijze in een volgende range overgaan:

- S_6 wordt groter dan x . (Range 2A)
- S_3 wordt gelijk aan b . (Range 2B)
- $S_3 + S_6$ wordt groter dan $2b-x$.⁸ (Range 2C)

Omdat Range 1 op een drietal manier in een andere Range over kan gaan wordt de bovengrens nu als volgt:

$\exists \# \min(\text{ondergrens 2A, ondergrens 2B, ondergrens 2C})$

Range 2A:

Range 2A gaat in Range 3A over als $S_3 + S_6$ groter dan $2b - x$ wordt. Als S_3 gelijk aan b wordt gaat Range 2A in Range 3B over. Voor de bovengrens van Range 2A geldt nu: $\exists \# \min(\text{ondergrens 3A, ondergrens 3B})$

Range 2B:

Range 2B gaat over in Range 3B als S_6 groter wordt dan x . In het geval dat $S_3 + S_6$ groter dan $2b - x$ wordt gaat Range 2B over in Range 3C. Voor de bovengrens van Range 2B geldt nu: $\exists \# \min(\text{ondergrens 3B, ondergrens 3C})$

Range 2C:

Range 2C gaat over in Range 3A als S_6 groter dan x wordt.

Range 3A:

Range 3A kan vanuit Range 2A en Range 2C bereikt worden. Range 3A gaat over in Range 4 als $S_3 = b$ wordt.

⁸ $2b-x$ is de waarde van alle paren van D_1 en D_2 die op de bovenste diagonale lijn in het diagram liggen.

Range 3B:

Range 3B kan vanuit Range 2A en Range 2B bereikt worden. De ondergrens wordt nu: $\exists \exists \max(\text{bovengrens 2A, bovengrens 2B})$. Range 3B gaat over in Range 4 als $S_3 + S_6$ groter dan $2b - x$ wordt.

Range 3C:

Range 3C gaat over in Range 4 als S_6 groter dan x wordt.

Tabel 3: Resultaten van het Basismodel BGN

Range 1: $S_3 = S_6(1/c - 1) + x, S_6 = \sqrt{\frac{\beta A}{1/c - 0.5}}$
 $\beta < \min\left(\frac{x^2}{A}(1/c - 0.5), \frac{(b-x)^2}{A} \frac{(1/c - 0.5)}{(1/c - 1)^2}, 4c^2 \frac{(b-x)^2}{A}(1/c - 0.5)\right) \text{ en } \exists \exists 0$

Range 2A: $S_3 = S_6/c, S_6 = \sqrt{(\beta A + 0.5x^2)c}$
 $\beta < \min\left(\frac{(2b-x)^2}{(1+1/c)^2} / Ac - 0.5x^2 / A, \frac{b^2c - 0.5x^2}{A}\right) \text{ en } \beta \geq \frac{x^2}{A}(1/c - 0.5)$

Range 2B: $S_3 = b, S_6 = \sqrt{(b-x)^2 + 2\beta A} - b + x$
 $\beta < \min\left(\frac{2bx - x^2}{2A}, 1.5 * \frac{(b-x)^2}{A}\right) \text{ en } \beta \geq \frac{(b-x)^2}{A} * \frac{(1/c - 0.5)}{(1/c - 1)^2}$

Range 2C: $S_3 = 2[b - (b-x)c] - x, S_6 = \frac{\beta A + 2(b-x)^2 c^2}{2(b-x)}$
 $\beta < \frac{2(b-x)[x - (b-x)c^2]}{A} \text{ en } \beta \geq 4c^2 \frac{(b-x)^2}{A} * (1/c - 0.5)$

Range 3A: $S_3 = S_6c - (2b-x)(c-1), S_6 = 2b-x - \sqrt{\frac{2b(b-x) - \beta A}{0.5(1/c^2 + 1)}} * 1/c$
 $\beta < (2b(b-x) - 0.5(b-x)^2(1+1/c^2)) / A \text{ en}$

$$\beta \geq \frac{(2b-x)^2}{(1+1/c)^2} / Ac - 0.5x^2 / A \text{ als 3A de opvolger van 2A is}$$

$$\beta \geq \frac{2(b-x)[x - (b-x)c^2]}{A} \text{ als 3A de opvolger van 2C is}$$

Eynan (1996) geeft voor S_6 de volgende waarde: $S_6 = 2b - x - \sqrt{\frac{2b(b-x) - \beta A}{0.5 * (1/c^2 + 1)}} * 1/c$

Range 3B: $S_3 = b, S_6 = (\beta A + 0.5x^2) / b$
 $\beta < (b^2 - bx - 0.5x^2) / A$ en $\beta \geq \max((b^2c - 0.5x^2) / A, (2bx - 0.5x^2) / 2A)$

Eynan (1996) geeft voor S_6 de volgende waarde: $S_6 = (\beta A + 0.5x^2) / A$

Range 3C: $S_3 = b, S_6 = \frac{\beta A}{2(b-x)} + 0.25(b-x)$
 $\beta < (6bx - b^2 - 5x^2) / 2A$ en $\beta \geq 1.5 * (b-x)^2 / A$

Range 4: $S_3 = b, S_6 = 2b - x - \sqrt{3b^2 - x^2 - 2bx - 2\beta A}$
 $\beta \geq \frac{2b(b-x) - 0.5(b-x)^2(1+1/c^2)}{A}$ als 4 de opvolger van 3A is
 $\beta \geq \frac{b^2 - bx - 0.5x^2}{A}$ als 4 de opvolger van 3B is
 $\beta \geq \frac{6bx - b^2 - 5x^2}{A}$ als 4 de opvolger van 3C is
en $\exists < 1$

Range 5: $S_3 = b, S_6 = b$ en $\exists = 1$

3 Het Commonality Model

In het voorgaande hoofdstuk is een model besproken waarbij twee verschillende eindproducten door twee verschillende componenten geproduceerd worden. Om kosten te besparen kan een bedrijf overwegen om de componenten van de twee eindproducten te gaan vervangen door gezamenlijke componenten. In dit hoofdstuk zal van elk van de eindproducten één van de componenten door een gezamenlijke component vervangen worden. In totaal blijven er nu nog maar drie componenten over. Een gezamenlijke component en twee specifieke. In paragraaf 3.1 wordt het Commonality Model besproken wanneer de vraag van de beide eindproducten ongecorrleerd is. In paragraaf 3.2 worden de voorraadniveaus van de verschillende componenten kosten berekend. In paragraaf 3.3 wordt de overstap gemaakt naar een model met gecorrleerde vraag. In paragraaf 3.4 wordt de variant waarbij de vraag tussen beide eindproducten positief gecorrleerd is nader uitgewerkt. Dit hoofdstuk wordt in paragraaf 3.5 besloten met een negatieve correlatie tussen de vraag van beide eindproducten.

3.1 Het Commonality Model met ongecorrleerde vraag (CO)

In het Commonality Model met ongecorrleerde vraag zijn er een tweetal eindproducten. Eindproduct 1 wordt geproduceerd door één component 3 en één component 7. Eindproduct 2 wordt geproduceerd door één component 6 en één component 7. Component 7 is nu de gezamenlijke component. Deze vervangt voor

eindproduct 1 component 4 en voor eindproduct 2 component 5. Voor dit model gelden de volgende aannamen:

1. De vraag van beide eindproducten is uniform verdeeld.
2. Aan de kosten van de componenten wordt de volgende voorwaarde opgelegd: $c_7 \geq \max(c_4, c_5)$. De gezamenlijke component is dus duurder dan ieder van de twee afzonderlijke componenten, die hij vervangt. Dit is een realistische aanname, aangezien de gezamenlijke component, de eigenschappen van beide componenten die hij vervangt moet hebben. In het geval dat de gezamenlijke component goedkoper is dan elk van de afzonderlijke componenten geldt dat de gezamenlijke component altijd moet worden gebruikt.
3. Het bedrijf moet voldoen aan een vooraf vastgesteld serviceniveau.

In het Commonality Model met ongecorreleerde vraag zullen nu de kosten geminimaliseerd gaan worden onder de voorwaarde dat het vooraf vastgestelde serviceniveau gehaald zal worden:

$$\text{Min } T_{CO} = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7 \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} &ASL \geq \beta \\ &S_3, S_6, S_7 \geq 0 \end{aligned}$$

3.2 Resultaten van het Commonality Model met ongecorreleerde vraag

Bij het Commonality Model met ongecorreleerde vraag zijn er een viertal situaties, die door de onderstaande tekeningen geïllustreerd worden:

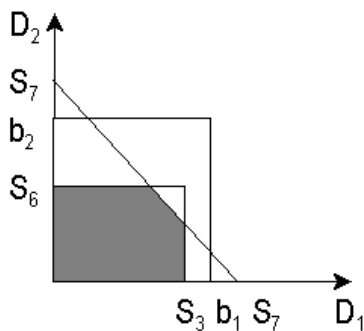


Fig. 20: CO model (Range 1)

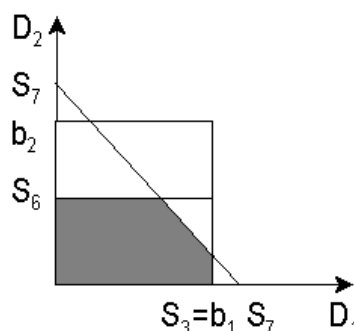


Fig. 21: CO model (Range 2A)

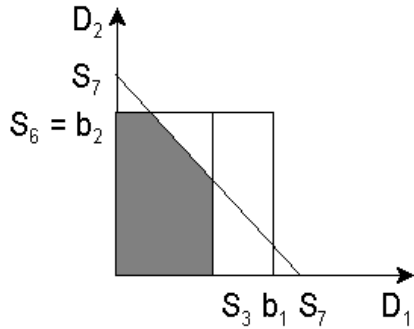


Fig. 22: CO model (Range 2B)

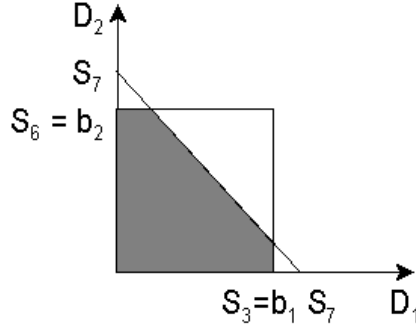


Fig. 23: CO model (Range 3)

Hieruit volgen de volgende voorwaarden voor de vier ranges:

Range 1: $S_3 < b_1$ en $S_6 < b_2$

Range 2A: $S_3 = b_1$ en $S_6 < b_2$

Range 2B: $S_3 < b_1$ en $S_6 = b_2$

Range 3: $S_3 = b_1$ en $S_6 = b_2$

De wijze waarop de ranges in elkaar overgaan is gelijk aan het Basismodel BO (paragraaf 2.2)

Tabel 4: Resultaten van het Commonality Model CO

Range 1: $S_3 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * (c_6 + c_7) / a, S_6 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * (c_3 + c_7) / a$
 $S_7 = \sqrt{\beta b_1 b_2} * (c_3 + c_6 + c_7) / a, a = \sqrt{(c_3 + c_7)(c_6 + c_7) - 0.5c_7^2}$
 $\beta < \min \left[\frac{b_1}{b_2} \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2, \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2 \right] \text{ en } \exists \exists 0$

Range 2A: $S_3 = b_1, S_6 = \frac{c_7^2 b_1}{2(c_6 + c_7)^2} + \beta b_2, S_7 = \left[\frac{c_6^2}{2(c_6 + c_7)^2} + 0.5 \right] b_1 + \beta b_2$
 $\beta < 1 - \frac{b_1}{b_2} * \frac{c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2} \text{ en } \beta \geq \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2$

Range 2B: $S_3 = \beta b_1 + \frac{c_7^2 b_2}{2(c_3 + c_7)^2}, S_6 = b_2, S_7 = \beta b_1 + \left[\frac{c_3^2}{2(c_3 + c_7)^2} + 0.5 \right] b_2$
 $\beta < 1 - \frac{b_2}{b_1} * \frac{c_7^2}{2(c_3 + c_7)^2} \text{ en } \beta \geq \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2$

Range 3: $S_3 = b_1, S_6 = b_2, S_7 = b_1 + b_2 - \sqrt{2(1 - \beta)b_1 b_2}$

$$\exists \beta \geq \max \left(1 - \frac{b_2}{b_1} * \frac{c_7^2}{2(c_2 + c_7)^2}, 1 - \frac{b_1}{b_2} * \frac{c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2} \right)$$

3.3 Het Commonality Model met gecorreleerde vraag (CG)

In de vorige paragraaf werd de aanname gemaakt, dat de vraag van de beide producten niet gecorreleerd is. Net als bij het Basis Model bestaat er ook bij het Commonality Model een variant met een gecorreleerde vraag. De varianten met een positief en een negatief gecorreleerde vraag worden in de komende twee paragrafen uitgewerkt.

Bij het Commonality Model met gecorreleerde vraag worden er een tweetal producten geproduceerd. Product 1 wordt geproduceerd met behulp van één component 3 en één gezamenlijke component 7. Product 2 wordt geproduceerd met behulp van één component 6 en één gezamenlijke component 7. Voor het model gelden de volgende aannames:

1. De vraag van de beide producten heeft een bivaariaat uniforme verdeling in het gebied $[0, b] \times [0, b]$.
2. Aan de kosten van de componenten worden de volgende restricties opgelegd:
 - a. $c_3 \neq c_6^9$
 - b. $c_7 \geq \max(c_4, c_5)$
3. Het bedrijf wil voldoen aan een vooraf vastgesteld service niveau β met een waarde tussen 0 en 1.

Bij berekeningen met het Commonality Model met gecorreleerde vraag moet nu het volgende model worden opgelost:

$$\text{Min } T_{CG} = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7$$

$$\text{s.t. } ASL \geq \beta$$

$$S_3, S_6, S_7 \geq 0$$

3.4 Het Commonality Model met positief gecorreleerde vraag (CGP)

Bij het Commonality Model met negatief gecorreleerde vraag zijn er zes verschillende ranges:

⁹ Deze aanname is van belang voor het berekenen van de verschillende ranges van het model. Door deze aanname wordt S_3 eerst groter dan x en daarna wordt S_6 pas groter dan x . (De verschillende ranges van het model worden in paragraaf 3.4 en 3.5 behandeld)

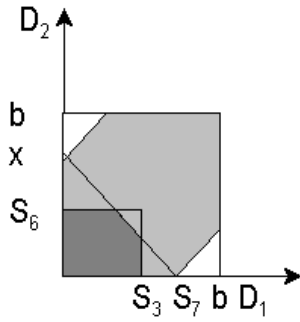


Fig. 24: CGP model (Range 1)

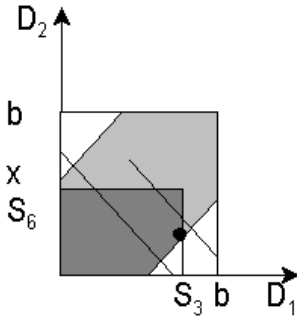


Fig. 25: CGP model (Range 2)

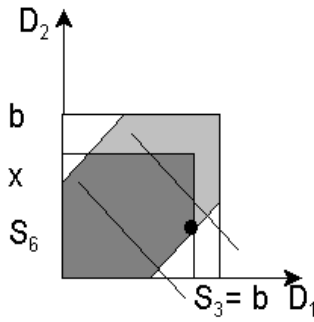


Fig. 26: CGP model (Range 3A)

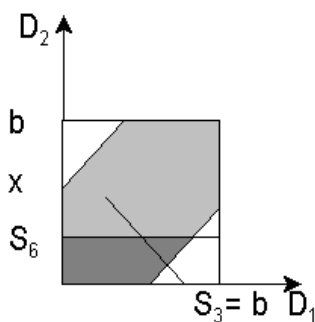


Fig. 27: CGP model (Range 3B)

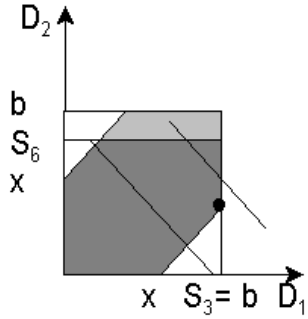


Fig. 28: CGP model (Range 4)

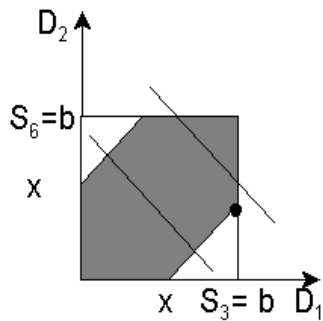
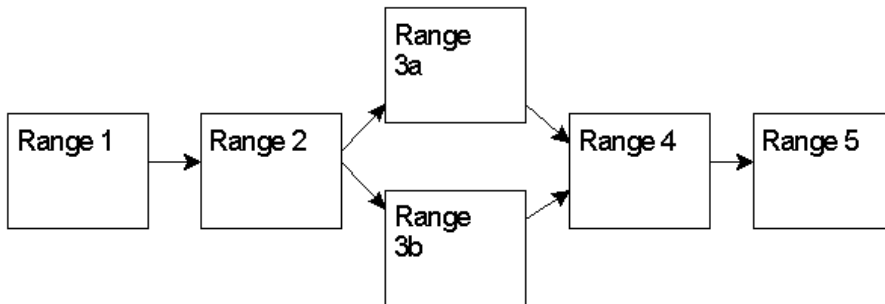


Fig. 29: CGP model (Range 5)

Voor de 6 ranges van het CGP model gelden de volgende voorwaarden:

- Range 1: $S_3 < x$, $S_6 < x$
- Range 2: $S_3 < b$, $S_6 < x$
- Range 3A: $S_3 < b$, $S_6 < b$
- Range 3B: $S_3 = b$, $S_6 < x$
- Range 4: $S_3 = b$, $S_6 < b$
- Range 5: $S_3 = b$, $S_6 = b$

De bovenstaande 6 ranges van het CGP model gaan op de volgende wijze in elkaar over:



De ranges gaan op dezelfde wijze in elkaar over als bij het Basismodel BGP.

Bij het uitvoeren van berekeningen treedt er bij het Commonality Model CGP echter een probleem op (Met uitzondering van Range 1, deze is gelijk aan Range 1 van het CO model). Het donkergrijze gebied is namelijk niet eenduidig gedefinieerd. In de plaatjes waar twee diagonale lijnen (die S_7 moeten voorstellen) wordt dit duidelijk. Het is namelijk van belang of de diagonale lijn boven of onder de zwarte punt "zit". Afhankelijk van zijn positie hebben een aantal ranges dus twee relevante (donkergrijze) gebieden. In het artikel van Eynan (1996) wordt hier niet op gewezen. Een expliciete berekening van het Commonality Model CGP zal dan hier ook niet plaatsvinden.

3.5 Het Commonality Model met negatief gecorreleerde vraag (CGN)

Bij het Commonality Model met negatief gecorreleerde vraag zijn er tien verschillende ranges:

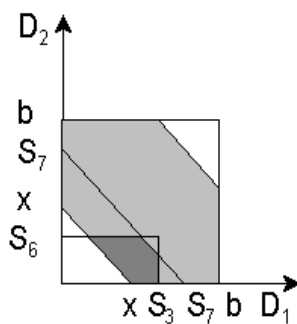


Fig. 32: CGN model (Range 1)

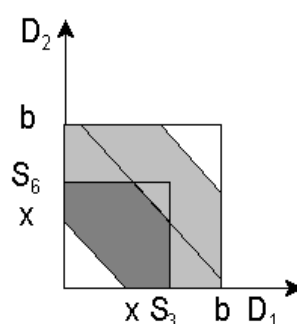


Fig. 33: CGN model (Range 2A)

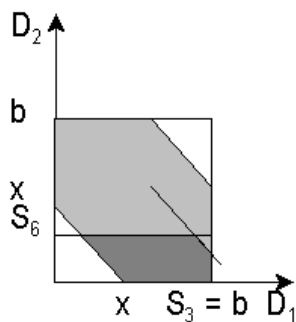


Fig. 34: CGN model (Range 2B)

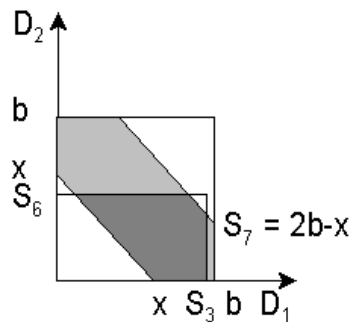


Fig. 35: CGN model (Range 2C)

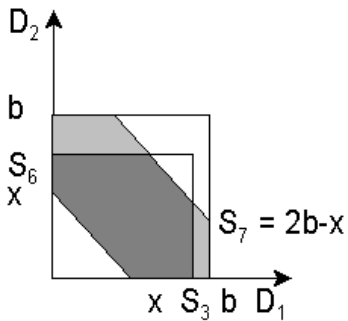


Fig. 36: CGN model (Range 3A)

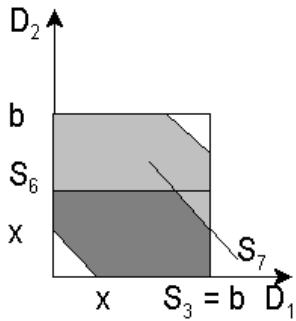


Fig. 37: CGN model (Range 3B)

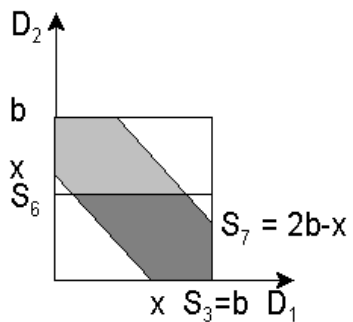


Fig. 38: CGN model (Range 3C)

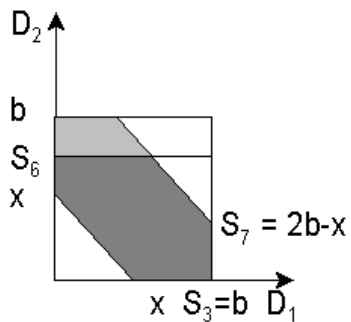


Fig. 39: CGN model (Range 4A)

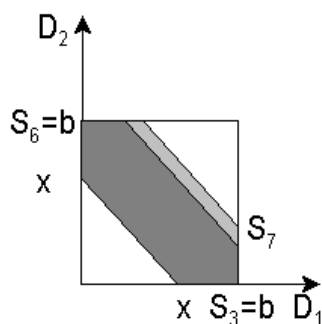


Fig. 40: CGN model (Range 4B)

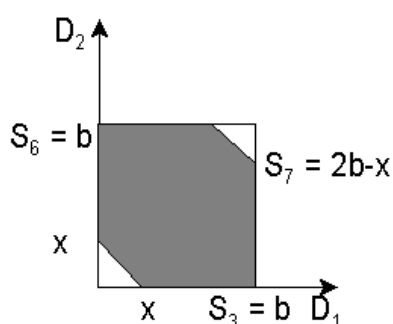


Fig. 41: CGN model (Range 5)

Voor de 10 ranges van het CGN model gelden de volgende voorwaarden:

- Range 1: $S_3 < b$, $S_6 < x$ en $S_7 < 2b - x$ (3.5.1)
- Range 2A: $S_3 < b$, $S_6 \geq x$ en $S_7 < 2b - x$ (3.5.2)
- Range 2B: $S_3 = b$, $S_6 < x$ en $S_7 < 2b - x$ (3.5.3)
- Range 2C: $S_3 < b$, $S_6 < x$ en $S_7 = 2b - x$ (3.5.4)
- Range 3A: $S_3 < b$, $S_6 \geq x$ en $S_7 = 2b - x$ (3.5.5)
- Range 3B: $S_3 = b$, $S_6 \geq x$ en $S_7 < 2b - x$ (3.5.6)
- Range 3C: $S_3 = b$, $S_6 < x$ en $S_7 = 2b - x$ (3.5.7)
- Range 4A: $S_3 = b$, $S_6 \geq x$ en $S_7 = 2b - x$ (3.5.8)
- Range 4B: $S_3 = b$, $S_6 = b$ en $S_7 < 2b - x$ (3.5.9)
- Range 5: $S_3 = b$, $S_6 = b$ en $S_7 = 2b - x$ (3.5.10)

De bovenstaande 10 ranges gaan op de volgende wijze in elkaar over:

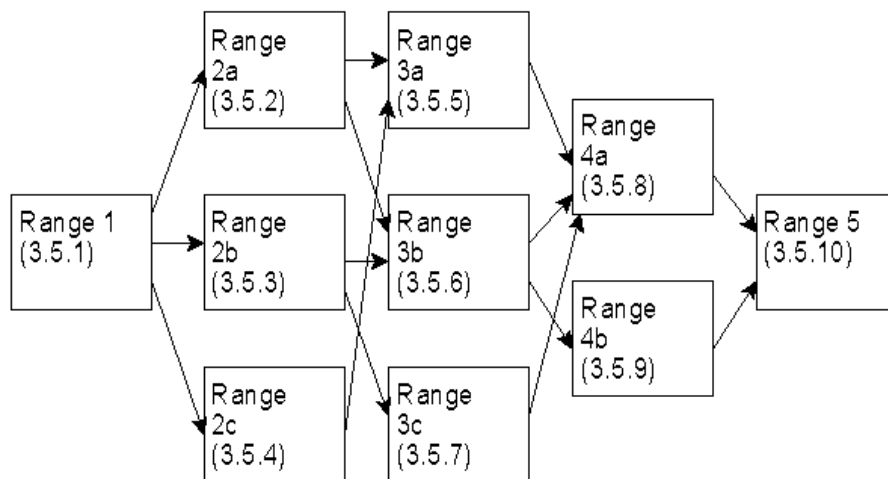


Fig. CGN: Ranges van het Commonality model CGN

De overgang van de verschillende Ranges van het CGN model is bijna identiek aan de besproken overgang van het BGN model in paragraaf 2.5 en zal daarom hier niet besproken worden.

Tabel 6: Resultaten van het Commonality Model CGN

Range 1: $S_3 = S_6 \frac{c_6 - c_3}{c_3 + c_7} + x, S_6 = \sqrt{\frac{\beta A}{\left(\frac{a}{c_3 + c_7}\right)^2 - 0.5}}, S_7 = S_6 \frac{c_6}{c_3 + c_7} + x$

$$\beta < \min \left(\frac{x^2 \left[\frac{a}{c_3 + c_7} - 0.5 \right]}{A \left[\frac{a}{c_3 + c_7} - 0.5 \right]}, \frac{(b-x)^2 (c_3 + c_7)^2 \left[\left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2 - 0.5 \right]}{A \left[\left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2 - 0.5 \right]}, \frac{4 \frac{(b-x)^2 (c_3 + c_7)^2 \left[\left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2 - 0.5 \right]}{A}}{\left[\left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2 - 0.5 \right]} \right) \text{ en } \exists \exists 0$$

Range 2A: $S_3 = S_6 \frac{c_6 + c_7}{c_3 + c_7}, S_6 = \sqrt{\beta A + 0.5x^2} \frac{c_3 + c_7}{a}, S_7 = S_6 \left(1 + \frac{c_6}{c_3 + c_7} \right)$

$$\beta < \min \left(\frac{(2b-x)^2 \left(\frac{a}{c_3 + c_6 + c_7} \right)^2 - \frac{1}{2}x^2}{A}, \frac{b^2 \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2 - \frac{1}{2}x^2}{A} \right) \text{ en}$$

$$\beta \geq \frac{x^2}{A} \left[\left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2 - \frac{1}{2} \right]$$

Range 2B: $S_3 = b, S_6 = x - b + \sqrt{\frac{(b-x)^2 + 2\beta A}{1 - \left(\frac{c_7}{c_6 + c_7} \right)^2}}, S_7 = S_6 \frac{c_6}{c_6 + c_7} + \frac{bc_6 + xc_7}{c_6 + c_7}$

$$\beta \geq \frac{(b-x)^2}{A} * \left(\frac{c_3 + c_7}{c_6 - c_3} \right)^2 \left[\left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2 - 0.5 \right] \text{ en}$$

$$\beta < \min \left(\frac{2bx - x^2 - b^2 \left(\frac{c_7}{c_6 + c_7} \right)^2}{2A}, \frac{(b-x)^2 \left[3 + 8 \frac{c_7}{c_6} \right]}{2A} \right)$$

Eynan (1996) geeft voor S_7 in het tweede deel van de teller: $bc_6 - xc_7$.

Range 2C: $S_3 = 2(b-x)\left(1 - \frac{c_3}{c_6}\right) + x, S_6 = \frac{\beta A + 2(b-x)^2 (c_3 / c_6)^2}{2(b-x)}, S_7 = 2b - x$

$$\beta < \frac{2(b-x)\left[x - (b-x)\left(\frac{c_3}{c_6}\right)^2\right]}{A} \text{ en}$$

$$\beta \geq 4 \frac{(b-x)^2}{A} \left(\frac{c_3 + c_7}{c_6}\right)^2 \left[\left(\frac{a}{c_3 + c_7}\right)^2 - 0.5\right]$$

Range 3A: $S_3 = S_6 * \frac{c_3}{c_6} + (2b-x)\left(1 - \frac{c_3}{c_6}\right),$

$$S_6 = 2b - x - \sqrt{(4b^2 - 4bx - 2\beta A) \frac{c_6^2}{c_3^2 + c_6^2}}, S_7 = 2b - x$$

Zoals te zien is in figuur CGN gaat Range 2C over in Range 3A. Dit doet zich voor als S_6 groter wordt dan x . In Eynan (1996) wordt echter aangenomen dat Range 2C onmiddellijk overgaat in Range 4A. De grenzen van Range 3A worden nu:

$$\beta \geq \frac{2(b-x)\left[x - (b-x)\left(\frac{c_3}{c_6}\right)^2\right]}{A} \text{ als 3A de opvolger van 2C is}$$

$$\beta \geq \frac{(2b-x)^2 \left(\frac{a}{c_3 + c_6 + c_7}\right)^2 - 0.5x^2}{A} \text{ als 3A de opvolger van 2A is}$$

en

$$\beta < \frac{2b(b-x) - 0.5(b-x)^2 \left[1 + \left(\frac{c_6}{c_3}\right)^2\right]}{A}$$

Range 3B: $S_3 = b, S_6 = \frac{2\beta A + x^2 + b^2 (c_7 / (c_6 + c_7))^2}{2b}, S_7 = S_6 + b \frac{c_6}{c_6 + c_7}$

$$\beta \geq \frac{b^2 \left(\frac{a}{c_6 + c_7}\right)^2 - 0.5x^2}{A} \text{ als 3B de opvolger van 2A is}$$

$$\beta \geq \frac{2bx - x^2 - b^2 \left(\frac{c_7}{c_6 + c_7}\right)^2}{2A} \text{ als 3B de opvolger van 2B is}$$

en

$$\beta < \min \left(\frac{b^2 \left[2 \left(1 + \frac{c_7}{c_6 + c_7} \right) - \left(\frac{c_7}{c_6 + c_7} \right)^2 \right] - 2bx - x^2}{2A}, \frac{b^2 \left[2 - \left(\frac{c_7}{c_6 + c_7} \right)^2 - x^2 \right]}{2A} \right)$$

Range 3C: $S_3 = b, S_6 = \beta A / 2(b - x) + 0.25(b - x), S_7 = 2b - x$
 $\beta < (6bx - b^2 - 5x^2) / 2A$ en $\beta \geq ((b - x)^2 [3 + 8c_7 / c_6]) / 2A$

Range 4A: $S_3 = b, S_6 = 2b - x - \sqrt{3b^2 - 2bx - x^2 - 2\beta A}, S_7 = 2b - x$
 $\exists < 1$ en

$$\beta \geq \frac{2b(b - x) - 0.5(b - x)^2 \left[1 + \left(\frac{c_6}{c_3} \right)^2 \right]}{A} \text{ als 4A de opvolger van 3A is}$$

$$\beta \geq \frac{b \left[2 \left(1 + \frac{c_7}{c_6 + c_7} \right) - \left(\frac{c_7}{c_6 + c_7} \right)^2 - 2bx - x^2 \right]}{2A} \text{ als 4A de opvolger van 3B is}$$

$$\beta \geq \frac{6bx - b^2 - 5x^2}{2A} \text{ als 4A de opvolger van 3C is}$$

Range 4B: $S_3 = b, S_6 = b, S_7 = 2b - \sqrt{2b^2 - x^2 - 2\beta A}$

$$\exists < 1 \text{ en } \beta \geq \frac{b^2 \left[2 - \left(\frac{c_7}{c_6 + c_7} \right)^2 - x^2 \right]}{2A}$$

Range 5: $S_3 = b, S_6 = b, S_7 = 2b - x$ en $\exists = 1$

4 Het Double Commonality Model

Het Commonality Model met een gezamenlijke component, zoals dit is voorgesteld in hoofdstuk 3 kan nog verder vereenvoudigd worden. In dit hoofdstuk worden ook de twee overgebleven productspecifieke componenten vervangen door een gezamenlijke component. Hierdoor ontstaat nu een model met twee producten en twee gezamenlijke componenten. Uit de kostenvergelijking, die in hoofdstuk 5 zal plaatsvinden zal blijken of een dergelijke operatie, wat kosten betreft, voordelig is. In paragraaf 4.1 wordt het Double Commonality Model besproken waarbij de vraag naar beide producten ongecorrleerd is. In paragraaf 4.2 wordt dit model expliciet berekend. Na de overstap naar het model met gecorrleerde vraag in paragraaf 4.3

zijn in de laatste twee paragrafen de varianten te vinden met een positief en een negatief gecorreleerde vraag.

4.1 Het Double Commonality Model met ongecorreleerde vraag (DO)

In het Double Commonality Model met ongecorreleerde vraag zijn er opnieuw een tweetal eindproducten. Zowel eindproduct 1 als eindproduct 2 worden geproduceerd door één component 7 en één component 8. De gezamenlijke component 7 vervangt voor eindproduct 1 component 4 en voor eindproduct 2 component 5, net zoals in het CO model. De gezamenlijke component 8 vervangt voor eindproduct 2 component 3 en voor eindproduct 2 component 6. Verder gelden voor dit model de volgende aannamen:

1. De vraag naar beide eindproducten is uniform verdeeld.
2. Aan de kostenstructuur van de componenten worden de volgende voorwaarden opgelegd:
 $c_7 \geq \max(c_4, c_5)$ en $c_8 \geq \max(c_3, c_6)$. Deze twee voorwaarden geven aan dat de gezamenlijke component steeds duurder is dan elk van de afzonderlijke componenten, die hij vervangt.
3. Het bedrijf moet voldoen aan een vooraf vastgesteld serviceniveau (ASL)

Het volgende model, waarbij de kosten geminimaliseerd worden onder de voorwaarde, dat aan het vooraf vastgestelde serviceniveau is voldaan kan nu gedefinieerd worden:

$$\text{Min } T_{DO} = c_7 S_7 + c_8 S_8$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} &ASL \geq \exists \\ &S_7, S_8 \geq 0 \end{aligned}$$

Aan het bovenstaande model kan vervolgens de volgende vereenvoudiging worden opgelegd:

1. Voor beide eindproducten is steeds één component 7 en één component 8 nodig. Het in voorraad hebben van ongelijke hoeveelheden van de componenten 7 en 8 leidt dus niet tot een verhoging van het serviceniveau.

$$\text{Min } T_{DO} = (c_7 + c_8) S_7$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} &ASL \geq \exists \\ &S_7 \geq 0 \end{aligned}$$

4.2 Resultaten van het Double Commonality Model met ongecorreleerde vraag

Het Double Commonality Model DO kan onderverdeeld worden in een viertal situaties:

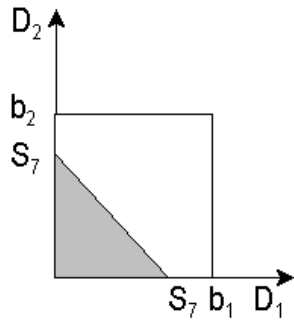


Fig. 42: DO model (Range 1)

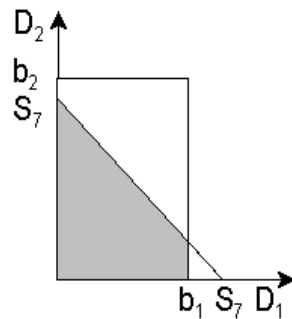


Fig. 43: DO model (Range 2A)

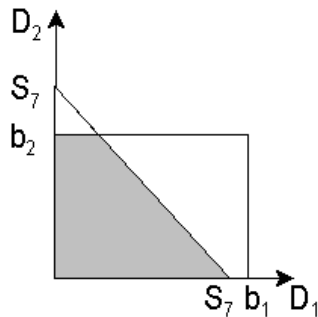


Fig. 44: DO model (Range 2B)

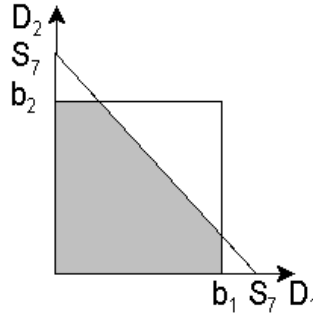


Fig. 45: DO model (Range 3)

Uit de bovenstaande vier plaatjes zijn de volgende voorwaarden af te leiden:

Range 1: $S_7 < \min(b_1, b_2)$

Range 2A: $S_7 \geq b_1$ en $S_7 < b_2$

Range 2B: $S_7 < b_1$ en $S_7 \geq b_2$

Range 3: $S_7 \geq \max(b_1, b_2)$

De overgang van de verschillende ranges in elkaar naarmate $\exists$ groter gebeurt op dezelfde manier als in het basismodel BO.

Tabel 7: Resultaten van het Double Commonality Model DO

Range 1: $S_7 = \sqrt{2\beta b_1 b_2}$ met $\exists \geq 0$ en $\exists < \min(b_1/2b_2, b_2/2b_1)$

Range 2A: $S_7 = 0.5b_1 + \exists b_2$ met $\exists \geq b_1/2b_2$ en $\exists < 1 - b_1/2b_2$

Range 2B: $S_7 = \exists b_1 + 0.5b_2$ met $\exists \geq b_2/2b_1$ en $\exists < 1 - b_2/2b_1$

Range 3: $S_7 = b_1 + b_2 - \sqrt{2(1-\beta)b_1 b_2}$ met $\exists \geq \max(1 - b_1/2b_2, 1 - b_2/2b_1)$ en $\exists \neq 1$

4.3 Het Double Commonality Model met gecorreleerde vraag (DG)

In deze paragraaf wordt het eerder besproken Double Commonality Model uitgebreid met de variant waarin de vraag ongecorreleerd is. Ook hierbij zijn er een variant met positieve correlatie en een variant met een negatieve correlatie.

Bij het Double Commonality Model met gecorreleerde vraag worden er een eindproduct 1 en een eindproduct 2 geproduceerd. Elk van deze eindproducten bestaat uit één gezamenlijke component 7 en één gezamenlijke component 8. Voor dit model gelden de volgende aannames:

1. De vraag van de beide producten heeft een bivaariaat uniforme verdeling in het gebied $[0,b] \times [0,b]$
2. Aan de kosten van de componenten worden de volgende restricties opgelegd:
 $c_7 \geq \max(c_4, c_5)$
 $c_8 \geq \max(c_3, c_6)$
3. Het bedrijf wil voldoen aan een vooraf vastgesteld serviceniveau $\geq$ met een waarde tussen 0 en 1.

Het Commonality Model met gecorreleerde vraag wordt nu als volgt:

$$\text{Min } T_{DG} = (c_7 + c_8)S_7$$

$$\text{s.t. } ASL \geq 0 \\ S_7 \geq 0$$

4.4 Het Double Commonality Model met positief gecorreleerde vraag (DGP)

In het DGP model zijn er slechts twee ranges. Door het feit dat b_1 gelijk is aan b_2 vervallen de ranges 2A en 2B uit het Basismodel DO.

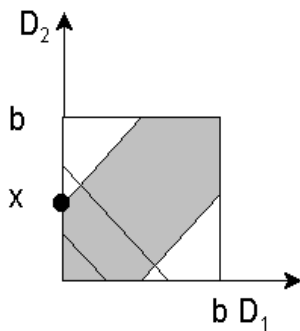


Fig. 46: DGP model (Range 1)

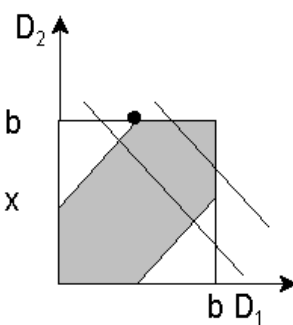


Fig. 47: DGP model (Range 2)

Bij het Double Commonality Model DGP treedt hetzelfde probleem op als bij het Commonality Model CGP. Ook bij dit model is het relevante gebied namelijk niet eenduidig vast te stellen. Van een verdere berekening van deze variant wordt hier dan ook afgezien.

4.5 Het Double Commonality Model met negatief gecorreleerde vraag (DGN)

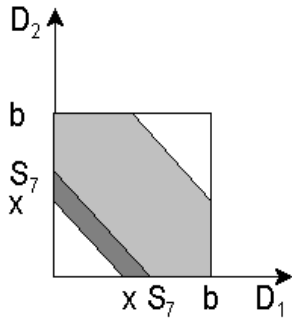


Fig. 48: DGN model (Range 1)

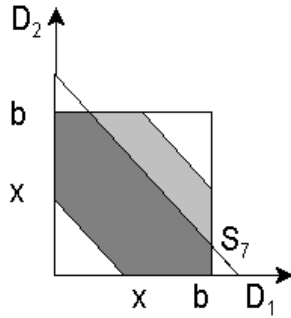


Fig. 49: DGN model (Range 2)

Voor bovenstaande ranges gelden de volgende voorwaarden:

Range 1: $S_7 < b$

Range 2: $S_7 \geq b$

Tabel 8: Resultaten van het Double Commonality Model DGN

Range 1: $S_7 = \sqrt{x^2 + 2\beta A}$ met $\exists \exists 0$ en $\exists < (b^2 - x^2)/2A$

Range 2: $S_7 = 2b - \sqrt{2b^2 - x^2 - 2\beta A}$ met $\exists \exists (b^2 - x^2)/2A$ en $\exists \neq 1$

5 Kostenanalyse

In de voorgaande drie hoofdstukken zijn in totaal een drietal soorten modellen besproken. In dit vijfde hoofdstuk zal een kostenvergelijking voor deze modellen gemaakt gaan worden. In paragraaf 5.1 worden de drie varianten van het model met ongecorreleerde vraag (BO, CO en DO) met elkaar vergeleken. In paragraaf 5.2 komt het model met negatief gecorreleerde vraag aan de beurt. Van een kostenvergelijking van de variant met een positief gecorreleerde vraag wordt in dit hoofdstuk afgezien, vanwege het feit dat de verschillende ranges hier niet eenduidig bepaald kunnen worden.

5.1 Kostenvergelijking Modellen met ongecorreleerde vraag

Met behulp van de gegevens uit de voorgaande hoofdstukken zijn de volgende drie kostentabellen te maken:

Tabel 10: Kosten Basismodel BO

Range 1: $T_{BO} = 2\sqrt{\beta b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}$

Range 2A: $T_{BO} = b_1(c_3 + c_4) + \beta b_2(c_5 + c_6)$

Range 2B: $T_{BO} = \beta b_1(c_3 + c_4) + b_2(c_5 + c_6)$

Tabel 11: Kosten Commonality Model CO

Range 1: $T_{CO} = 2\sqrt{\beta b_1 b_2} a$

Range 2A: $T_{CO} = a^2 b_1 / (c_6 + c_7) + \beta b_2 (c_6 + c_7)$

Range 2B: $T_{CO} = (c_3 + c_7) \beta b_1 + a^2 b_2 / (c_3 + c_7)$

Range 3: $T_{CO} = (c_3 + c_7) b_1 + (c_6 + c_7) b_2 - c_7 \sqrt{2(1-\beta) b_1 b_2}$

Tabel 12: Kosten Double Commonality Model DO

Range 1: $T_{DO} = (c_7 + c_8) \sqrt{2\beta b_1 b_2}$

Range 2A: $T_{DO} = (c_7 + c_8)(0.5b_1 + \beta b_2)$

Range 2B: $T_{DO} = (c_7 + c_8)(\beta b_1 + 0.5b_2)$

Range 3: $T_{DO} = (c_7 + c_8)(b_1 + b_2 - \sqrt{2(1-\beta) b_1 b_2})$

Eigenschap 5.1.1: De kosten van het Basismodel BO (T_{BO}) zijn lager dan die van het Commonality Model CO (T_{CO}) als:
 $a^2 > (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)^{10}$

Om Eigenschap 5.1.1 te bewijzen, zal voor alle combinaties van ranges van de beide modellen (3x4) aangetoond moeten worden dat T_{BO} kleiner is dan T_{CO} . De verschillende ranges zijn eerder al uitgedrukt als een functie van $\exists$. Het bewijzen van bovenstaande eigenschap is nu mogelijk door gebruik te maken van de afgeleide van T_{BO} (en T_{CO}) naar $\exists$. Eerst moet bewezen worden dat $dT_{CO}/d\exists > dT_{BO}/d\exists$ is voor alle 12 combinaties van ranges. Dit bewijs is terug te vinden in Appendix B. Dit impliceert vervolgens dat de marginale kosten van model CO als functie van $\exists$ altijd sneller zullen stijgen dan de marginale kosten van model BO als functie van $\exists$ voor alle mogelijke combinaties van ranges. $\exists$ kan enkel waarden tussen 0 en 1 aannemen. Als $\exists$ de waarde 0 heeft zijn de kosten zowel in het BO als in het CO model 0. De kosten van het CO model zullen echter altijd sneller stijgen, dan die van het BO model. Verder zijn de kosten als functie van $\exists$ een continue variabele. Bij een overgang naar een andere range “springen” de kosten dus niet ineens een heel stuk omhoog of omlaag. Met bovenstaande gegevens is vervolgens eigenschap 1 af te leiden.

¹⁰ Eynan en Rosenblatt (1996) gebruiken in hun artikel een andere uitdrukking. Dit is enkel een andere schrijfwijze van de hierboven gebruikte uitdrukking.

Eigenschap 5.1.2: De kosten van het Basismodel BO (T_{BO}) zijn lager dan die van het Commonality Model CO (T_{CO}) als:

$$c_7 + c_8 > \sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}$$

Eigenschap 5.1.3: De kosten van het Basismodel BO (T_{BO}) zijn lager dan die van het Double Commonality Model DO (T_{DO}) als:

$$c_7 + c_8 > \sqrt{2(c_3 + c_7)(c_6 + c_7) - c_7^2}$$

5.2 Kostenvergelijking Modellen met negatief gecorreleerde vraag

[nog doen]

6. Kostenvoorbeeld

6.1 Kostenvoorbeeld met ongecorreleerde vraag

Na een viertal theoretische hoofdstukken zal in hoofdstuk 6 nader worden ingegaan op de kostenvoordelen die er in praktijkvoorbeelden te behalen zijn. Bij het bepalen van deze kostenvoordelen zullen voor de modellen met ongecorreleerde vraag de volgende eigenschappen gelden:

1. $c_3 = c_4 = c_5 = c_6$ en $b_1 = b_2$
2. $c_7 = c_8 = \forall c$ met $\forall \exists 1$

Allereerst zal de relatie tussen het serviceniveau ($\exists$) en de relatieve kosten van de gezamenlijke component t.o.v. de specifieke component ($\forall$) bekeken worden voor de drie modellen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de MATLAB-programma's uit Appendix C. Deze programma's berekenen voor een ($\exists, \forall$) combinatie de kosten van twee modellen.

In figuur 50 worden het Basismodel en het Commonality Model vergeleken. Indien de kosten van het Commonality Model hoger zijn dan van het Basismodel wordt in de ($\exists, \forall$) grafiek een zwarte punt geplaatst. De grafiek zal nu bestaan uit een wit gedeelte waar het zinvol is het Commonality Model te gebruiken en een zwart gedeelte waar beter het Basismodel gebruikt kan worden. In figuur 51 worden het Basismodel en het Double Commonality Model vergeleken. In figuur 52 het Commonality Model en het Double Commonality Model.

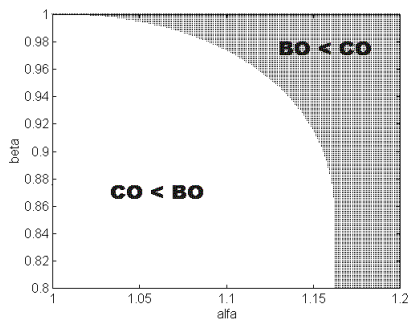


Fig. 50: $(\exists, \forall)$ relatie voor BO en CO
DO

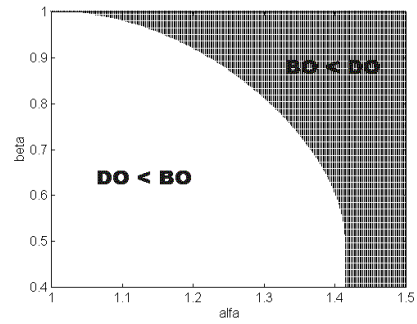


Fig. 51: $(\exists, \forall)$ relatie voor BO en

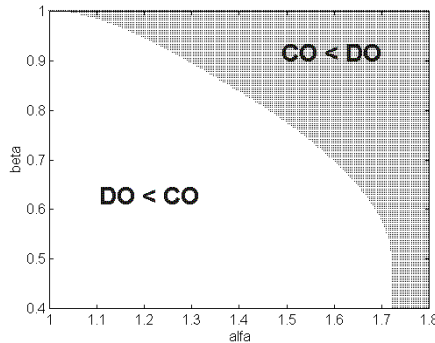


Fig. 52: $(\exists, \forall)$ relatie voor CO en DO

Uit de bovenstaande drie figuren is een minimale waarde van $\forall$ af te leiden waarboven het voordeliger is een bepaald model te gebruiken. In Figuur 50 ligt deze waarde rond de 1.16. Een $\forall$ van groter dan 1.16 betekent in dit geval dat model BO onafhankelijk van de waarde van $\exists$ altijd het goedkoopst is. De waarde van $\forall$ is echter ook expliciet af te leiden. Dit gebeurt in Eigenschap 6.1.1. Verder valt uit de bovenstaande figuren op te merken, dat naarmate $\exists$ groter wordt het steeds minder voordelig wordt op het BO model door het CO of DO model te vervangen en het CO door het DO model te vervangen.

Eigenschap 6.1.1: In het geval dat $c_3 = c_4 = c_5 = c_6$, $b_1 = b_2$ en $c_7 = c_8 = \forall c$ met $\forall \exists 1$ geldt:

$$T_{CO} > T_{BO} \text{ als } c_7 > (\sqrt{10} - 2)c$$

$$T_{DO} > T_{BO} \text{ als } c_7 > \sqrt{2}c$$

$$T_{DO} > T_{CO} \text{ als } c_7 > 1.72c$$

Bij het vergelijken van het Basismodel en het Commonality Model kunnen de aan het begin van deze paragraaf genoemde eigenschappen ook nog enigszins aangepast worden: $c_3 = c_6 = c_u$, $c_4 = c_5 = c_c$ en $b_1 = b_2$. In dit geval zijn de kosten van de specifieke componenten (c_3 en c_6) aan elkaar gelijk. Dit geldt ook voor de kosten van de twee componenten (c_4 en c_5) die in het Commonality Model door de gezamenlijke component c_7 worden vervangen. Op basis van de relatieve kosten van de specifieke componenten en de relatieve kosten van de gezamenlijke component c_7 wordt nu een vergelijking gemaakt tussen het Basismodel en het Commonality Model.

Uit de bovenstaande figuur valt af te leiden, dat naarmate de kosten van de specifieke componenten t.o.v. de gezamenlijke component toenemen het steeds minder aantrekkelijk wordt om het Basismodel door het Commonality Model te vervangen. Uit Eigenschap 5.1.1 is de volgende voorwaarde af te leiden waaronder Basismodel altijd goedkoper is dan het Commonality Model:

Eigenschap 6.1.2.: Onder de voorwaarden $c_3 = c_6 = c_u$, $c_4 = c_5 = c_c$ en $b_1 = b_2$ is het Basismodel altijd goedkoper dan het Commonality Model als

$$\text{geldt: } c_7 > \sqrt{4c_u^2 + 2c_c^2 + 4c_c c_u} - 2c_u$$

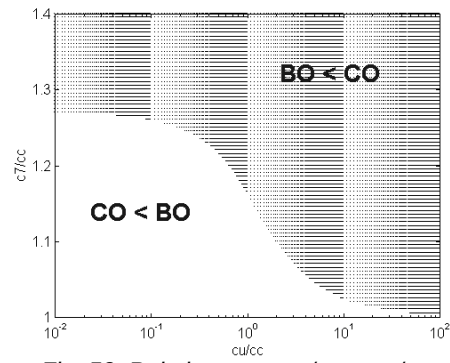


Fig. 53: Relatie tussen c_l/c_c en c_u/c_c

6.2 Kostenvoorbeeld met negatief gecorreleerde vraag

Literatuuropgave

Eynan, A., 1996, The impact of demands' correlation on the effectiveness of component commonality. *International Journal of Production Research*, **34**(6), 1581-1602.

Eynan, A. en Rosenblatt, Meir J., 1996, Component commonality effects on inventory costs. *IIE Transactions*, **28**(1), 93-104.

Hillier, M.S., 1999, Component commonality in a multiple-period inventory model with service level constraints. *International Journal of Production Research*, **37**(12), 2665-2683.

Perera, H.S.C., Nagarur, N en Tabucanon, Mario T., 1999, Component part standardization : A way to reduce the life-cycle costs of products. *International Journal of Production Economics*, **60-61**, 109-116.

Appendix A: Modelberekeningen

2.2.1 Het Basismodel BO (Range 1)

Voor Range 1 kan het Basismodel BO met behulp van een Lagrange functie en de bijbehorende eerste orde afgeleiden worden opgelost:

$$L = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6 - 8(S_3S_6 - \exists b_1b_2) \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_3} = c_3 + c_4 - \lambda(S_6 / b_1b_2) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_6} = c_5 + c_6 - \lambda(S_3 / b_1b_2) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = S_3S_6 / b_1b_2 - \beta = 0 \quad (4)$$

Uit (2) en (3) volgt:

$$\lambda = \frac{b_1b_2(c_3 + c_4)}{S_6} = \frac{b_1b_2(c_5 + c_6)}{S_3} \Rightarrow S_3 = \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)} S_6 \quad (5)$$

(5) invullen in (4) geeft:

$$\beta = \frac{(c_5 + c_6) S_6^2}{(c_3 + c_4) b_1b_2} \Rightarrow S_6 = \sqrt{\beta b_1b_2 \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)}} \quad (6)$$

(6) invullen in (5) geeft:

$$S_3 = \left(\sqrt{\frac{(c_5 + c_6)^2}{(c_3 + c_4)^2}} \right) \sqrt{\beta b_1b_2 \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)}} \Rightarrow S_3 = \sqrt{\beta b_1b_2 \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)}} \quad (7)$$

Na het berekenen van de waarden van de beslissingsvariabelen moet het gebied van Range 1 nog bepaald worden. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de voorwaarden voor Range 1 uit paragraaf 2.2:

$$S_3 < b_1 \Rightarrow \sqrt{\beta b_1b_2 \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)}} < b_1 \Rightarrow \beta b_2 \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)} < b_1^2 \Rightarrow \beta < \frac{b_1^2(c_3 + c_4)}{b_2(c_5 + c_6)} \quad (8)$$

$$S_6 < b_2 \Rightarrow \sqrt{\beta b_1b_2 \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)}} < b_2 \Rightarrow \beta b_1 \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)} < b_2^2 \Rightarrow \beta < \frac{b_2^2(c_5 + c_6)}{b_1(c_3 + c_4)} \quad (9)$$

Uit (8) en (9) volgt nu:

$$\beta < \min \left(\frac{b_1(c_3 + c_4)}{b_2(c_5 + c_6)}, \frac{b_2(c_5 + c_6)}{b_1(c_3 + c_4)} \right) \quad (10)$$

2.2.2 Het Basismodel BO (Range 2a)

$$\text{Min} \quad T_{BO} = (c_3 + c_4)b_1 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t.} \quad \exists = S_6/b_2 \\ S_6 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = (c_3 + c_4)b_1 + (c_5 + c_6)S_6 - 8(S_6 - \exists b_2)$$

$$\text{Eerste orde afgeleiden: } \frac{\partial L}{\partial S_6} = (c_5 + c_6) - \lambda / b_2 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = S_6 / b_2 - \beta = 0$$

2.2.3 Het Basismodel BO (Range 2b)

$$\text{Min} \quad T_{BO} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)b_2$$

$$\text{s.t.} \quad \exists = S_3/b_1 \\ S_3 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)b_2 - 8(S_3 - \exists b_1)$$

$$\text{Eerste orde afgeleiden: } \frac{\partial L}{\partial S_3} = (c_3 + c_4) - \lambda / b_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = S_3 / b_1 - \beta = 0$$

2.2.4 Het Basismodel BO (Range 3)

$$\text{Min} \quad T_{BO} = (c_3 + c_4)b_1 + (c_5 + c_6)b_2$$

$$\text{s.t.} \quad \exists = 1$$

2.4.1 Het Basismodel BGP (Range 1)

$$\text{Min} \quad T_{BGP} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t.} \quad \exists = S_3 S_6 / A \\ S_3, S_6 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6 - 8(S_3 S_6 - \exists A)$$

$$\text{Eerste orde afgeleiden: } \frac{\partial L}{\partial S_3} = (c_3 + c_4) - \lambda (S_6 / A),$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_6} = (c_5 + c_6) - \lambda (S_3 / A), \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = (S_3 S_6 / A - \beta)$$

Bepaling range:

$$S_3 < x \Rightarrow \sqrt{\frac{\beta A}{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}} < x \Rightarrow \beta A \frac{(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_4)} < x^2 \Rightarrow \beta < \frac{(c_3 + c_4)}{(c_5 + c_6)} * \frac{x^2}{A}$$

2.4.2 Het Basismodel BGP (Range 2)

$$\text{Min } T_{\text{BGP}} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t. } \exists = (S_3 S_6 - 0.5(S_3 - x)^2) / A$$

$$S_3, S_6 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6 - 8(S_3 S_6 - 0.5(S_3 - x)^2 - \exists A)$$

$$\text{Eerste orde afgeleiden: } \frac{\partial L}{\partial S_3} = (c_3 + c_4) - \lambda(S_6 - S_3 + x) / A = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_6} = (c_5 + c_6) - \lambda S_3 / A = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = (S_3 S_6 - 0.5(S_3 - x)^2 / A - \beta) = 0$$

Bepaling range:

$$S_3 < b \Rightarrow \sqrt{\frac{\beta A + 0.5x^2}{c + 0.5}} < b \Rightarrow \beta A + 0.5x^2 < b^2(c + 0.5) \Rightarrow \beta < \frac{b^2(c + 0.5) - 0.5x^2}{A}$$

$$S_6 < x \Rightarrow \sqrt{\frac{\beta A + 0.5x^2}{c + 0.5}}(c + 1) - x < x \Rightarrow (\beta A + 0.5x^2)(c + 1)^2 < x^2(c + 0.5) \Rightarrow \beta < \left[4 \frac{c + 0.5}{(c + 1)^2} - 0.5 \right] \frac{x^2}{A}$$

2.4.3 Het Basis Model BGP (Range 3a)

$$\text{Min } T_{\text{BGP}} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t. } \exists = (S_3 S_6 - 0.5(S_3 - x)^2 - 0.5(S_6 - x)^2) / A$$

$$S_3, S_6 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6 - 8(S_3 S_6 - 0.5(S_3 - x)^2 - 0.5(S_6 - x)^2 - \exists A)$$

Eerste orde afgeleiden:

$$\frac{\partial L}{\partial S_3} = (c_3 + c_4) - \lambda(S_6 - S_3 + x) / A = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial S_6} = (c_5 + c_6) - \lambda(S_3 - S_6 + x) / A = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = ((S_3 S_6 - 0.5(S_3 - x)^2 - 0.5(S_6 - x)^2) / A - \beta) = 0$$

Bepaling range:

$$S_3 < b \Rightarrow \frac{\beta A}{2x} + 0.5x(1 - F + 0.5F^2) < b \Rightarrow \beta < \frac{xb}{A} \left(2 - \frac{x}{b}(1 - F + 0.5F^2) \right)$$

2.4.4 Het Basismodel BGP (Range 3b)

$$\text{Min } T_{\text{BGP}} = (c_3 + c_4)b + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t. } \exists = (S_6b - 0.5(b - x)^2)/A \\ S_6 \geq 0$$

Eynan (1996) heeft als nevenvoorwaarde: $\exists = (S_6b - 0.5x^2)/A$ maar geeft in Tabel 1 wel de juiste uitkomsten.

$$\text{Lagrange functie: } L = (c_3 + c_4)b + (c_5 + c_6)S_6 - 8(S_6b - 0.5(b - x)^2 - \exists A)$$

Eerste orde afgeleiden:

$$\frac{\partial L}{\partial S_6} = (c_5 + c_6) - \lambda b / A = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = (bS_6 - 0.5(b - x)^2) / A - \beta = 0$$

Bepaling range:

$$S_6 < x \Rightarrow \frac{\beta A + (b - x)^2 / 2}{b} < x \Rightarrow \beta A + 0.5(b - x)^2 < bx \Rightarrow \beta < \frac{bx - 0.5(b - x)^2}{A}$$

2.4.5 Het Basismodel BGP (Range 4)

Eynan (1996) geeft ook bij Range 4 een verkeerde nevenvoorwaarde, maar een juiste uitkomst in Tabel 1. Het gecorrigeerde model wordt nu:

$$\text{Min } T_{\text{BGP}} = (c_3 + c_4)b + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t. } \exists = (S_6b - 0.5(b - x)^2 - 0.5(S_6 - x)^2)/A \\ S_6 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = (c_3 + c_4)b + (c_5 + c_6)S_6 - 8(S_6b - 0.5(b - x)^2 - 0.5(S_6 - x)^2 - \exists A)$$

Eerste orde afgeleiden:

$$\frac{\partial L}{\partial S_6} = (c_5 + c_6) - \lambda(b - S_6 + x) / A = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = (bS_6 - 0.5(b - x)^2 - 0.5(S_6 - x)^2) / A - \beta = 0$$

2.4.6 Het Basismodel BGP (Range 5)

$$\text{Min } T_{\text{BGP}} = (c_3 + c_4 + c_5 + c_6)b$$

$$\text{s.t. } \exists = 1$$

2.5.1 Het Basismodel BGN (Range 1)

$$\text{Min } T_{\text{BGN}} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t. } \exists = (S_6(S_3 - x) + 0.5S_6^2)/A \\ S_3, S_6 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6 - 8(S_6(S_3 - x) + 0.5S_6^2 - \exists A)$$

Eerste orde afgeleiden: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_3} = (c_3 + c_4) - \lambda S_6 / A = 0$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_6} = (c_5 + c_6) - \lambda(S_3 - x + S_6) / A = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (S_6(S_3 - x) + 0.5S_6^2) / A - \beta = 0$$

Bepaling range:

$$S_3 < b \Rightarrow \sqrt{\frac{\beta A}{(1/c - 0.5)}} * (1/c - 1) + x < b \Rightarrow \frac{\beta A}{(1/c - 0.5)} < \frac{(b - x)^2}{(1/c - 1)^2} \Rightarrow \beta < \frac{(b - x)^2}{A} \frac{(1/c - 0.5)}{(1/c - 1)^2}$$

$$S_6 < x \Rightarrow \sqrt{\frac{\beta A}{(1/c - 0.5)}} < x \Rightarrow \beta < \frac{x^2}{A} (1/c - 0.5)$$

$$S_3 + S_6 < 2b - x \Rightarrow \sqrt{\frac{\beta A}{(1/c - 0.5)}} * 1/c < 2b - 2x \Rightarrow \beta < 4c^2 \frac{(b - x)^2}{A} (1/c - 0.5)$$

2.5.2 Het Basismodel BGN (Range 2A)

$$\text{Min } T_{\text{BGN}} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t. } \exists = (S_3S_6 - 0.5x^2)/A \\ S_3, S_6 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6 - \lambda(S_3S_6 - 0.5x^2 - \exists A)$$

Eerste orde afgeleiden: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_3} = (c_3 + c_4) - \lambda S_6 / A = 0$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_6} = (c_5 + c_6) - \lambda S_3 / A = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (S_3S_6 - 0.5x^2) / A - \beta = 0$$

Bepaling range:

$$S_6 < b \Rightarrow \sqrt{(\beta A + 0.5x^2)/c} < b \Rightarrow \beta < \frac{b^2c - 0.5x^2}{A}$$

$$S_3 + S_6 < 2b - x \Rightarrow \sqrt{(\beta A + 0.5x^2)c(1 + 1/c)} < 2b - x \Rightarrow (\beta A + 0.5x^2)c < \frac{(2b - x)^2}{(1 + 1/c)^2} \Rightarrow$$

$$\beta < \frac{(2b - x)^2}{(1 + 1/c)^2} / AC - 0.5x^2 / A$$

2.5.3 Het Basismodel BGN (Range 2B)

$$\text{Min } T_{\text{BGN}} = (c_3 + c_4)b + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t. } \exists = (S_6(b - x) + 0.5S_6^2)/A \\ S_6 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = (c_3 + c_4)b + (c_5 + c_6)S_6 - \lambda(S_6(b - x) + 0.5S_6^2 - \exists A)$$

Eerste orde afgeleiden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_6} = (c_5 + c_6) - \lambda(b - x + S_6) / A = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (S_6(b - x) + 0.5S_6^2) / A - \beta = 0$$

Bepaling range:

$$S_6 < x \Rightarrow \sqrt{(b - x)^2 + 2\beta A} - b + x < x \Rightarrow (b - x)^2 + 2\beta A < b^2 \Rightarrow \beta < \frac{2bx - x^2}{2A}$$

$$S_3 + S_6 < 2b - x \Rightarrow \sqrt{(b - x)^2 + 2\beta A} + x < 2b - x \Rightarrow (b - x)^2 + 2\beta A < (2b - 2x)^2 \Rightarrow \beta < 1.5 * (b - x)^2 / A$$

2.5.4 Het Basismodel BGN (Range 2C)

$$\text{Min } T_{\text{BGN}} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t. } \exists = (S_3S_6 + 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_3 + S_6 - 2b + x)^2) / A \\ S_3, S_6 \geq 0$$

Lagrange functie:

$$L = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6 - 8(S_3S_6 + 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_3 + S_6 - 2b + x)^2 - \exists A)$$

Eerste orde afgeleiden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_3} = (c_3 + c_4) - \lambda(2b - x - S_3) / A = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_6} = (c_5 + c_6) - \lambda(2b - 2x) / A = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (S_3S_6 + 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_3 + S_6 - 2b + x)^2) / A - \beta = 0$$

Bepaling range:

$$S_6 < x \Rightarrow \frac{\beta A + 2c^2(b - x)^2}{2(b - x)} < x \Rightarrow \beta A + 2(b - x)^2 c^2 < 2x(b - x) \Rightarrow \beta < \frac{2(b - x)[x - (b - x)c^2]}{A}$$

2.5.5 Het Basismodel BGN (Range 3A)

$$\text{Min } T_{\text{BGN}} = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t. } \exists = (S_3S_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_3 + S_6 - 2b + x)^2) / A \\ S_3, S_6 \geq 0$$

Lagrange functie:

$$L = (c_3 + c_4)S_3 + (c_5 + c_6)S_6 - 8(S_3S_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_3 + S_6 - 2b + x)^2 - \exists A)$$

Eerste orde afgeleiden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_3} = (c_3 + c_4) - \lambda(2b - x - S_3) / A = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_6} = (c_5 + c_6) - \lambda(2b - x - S_6) / A = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (S_3S_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_3 + S_6 - 2b + x)^2) / A - \beta = 0$$

Bepaling range:

$$S_3 < b \Rightarrow 2b - x - \sqrt{\frac{2b(b-x) - \beta A}{0.5(1+1/c^2)}} < b \Rightarrow \beta < \frac{2b(b-x) - 0.5 \cdot (b-x)^2 (1+1/c^2)}{A}$$

2.5.6 Het Basismodel BGN (Range 3B)

$$\text{Min } T_{\text{BGN}} = (c_3 + c_4)b + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t. } \exists = (bS_6 - 0.5x^2)/A \\ S_6 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = (c_3 + c_4)b + (c_5 + c_6)S_6 - 8(bS_6 - 0.5x^2 - \exists A)$$

$$\text{Eerste orde afgeleiden: } \frac{\partial L}{\partial S_6} = (c_5 + c_6) - \lambda b / A = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = (bS_6 - 0.5x^2) / A - \beta = 0$$

Bepaling range:

$$S_3 + S_6 < 2b - x \Rightarrow b + \frac{\beta A + 0.5x^2}{b} < 2b - x \Rightarrow \beta A + 0.5x^2 < b(b-x) \Rightarrow \beta < (b^2 - bx - 0.5x^2) / A$$

Bepaling ondergrens:

(1): Range 2A is de voorganger van Range 3B:

Nu geldt: $x \neq bc$.

$$(b^2c - 0.5x^2) / A = (2b^2c - x^2) / 2A > (2bx - x^2) / 2A$$

(2): Range 2B is de voorganger van Range 3B:

Nu geldt: $x > bc$

$$(b^2c - 0.5x^2) / A = (2b^2c - x^2) / 2A < (2bx - x^2) / 2A$$

De relevante ondergrens van 3B is dus groter dan de niet-relevante bovengrens.

2.5.7 Het Basismodel BGN (Range 3C)

$$\text{Min } T_{\text{BGN}} = (c_3 + c_4)b + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t. } \exists = (bS_6 - 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_6 - b + x)^2) / A \\ S_6 \geq 0$$

Lagrange functie:

$$L = (c_3 + c_4)b + (c_5 + c_6)S_6 - 8(bS_6 - 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_6 - b + x)^2 - \exists A)$$

Eerste orde afgeleiden:

$$\frac{\partial L}{\partial S_6} = (c_5 + c_6) - \lambda(2(b-x)) / A = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = (2S_6(b-x) - 0.5(b-x)^2) / A - \beta = 0$$

Bepaling range:

$$S_6 < x \Rightarrow \frac{\beta A}{2(b-x)} + 0.25(b-x) < x \Rightarrow \beta A < 2 * (1.25x - 0.25b)(b-x) \Rightarrow \beta < (6bx - b^2 - 5x^2) / A$$

2.5.8 Het Basismodel BGN (Range 4)

$$\text{Min } T_{\text{BGN}} = (c_3 + c_4)b + (c_5 + c_6)S_6$$

$$\text{s.t. } \exists = (bS_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - b + x)^2) / A$$

$$S_6 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = (c_3 + c_4)b + (c_5 + c_6)S_6 - 8(bS_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - b + x)^2 - \exists A)$$

$$\text{Eerste orde afgeleiden: } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = ((bS_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - b + x)^2) / A - \beta) = 0$$

2.5.9 Het Basismodel BGN (Range 5)

$$\text{Min } T_{\text{BGN}} = (c_3 + c_4 + c_5 + c_6)b$$

$$\text{s.t. } \exists = 1$$

3.2.1 Het Commonality Model CO (Range 1)

$$\text{Min } T_{\text{CO}} = c_3S_3 + c_6S_6 + c_7S_7$$

$$\text{s.t. } \exists b_1b_2 = S_3S_6 - 0.5(S_3 + S_6 - S_7)^2$$

$$S_3, S_6, S_7 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = c_3S_3 + c_6S_6 + c_7S_7 - 8(S_3S_6 - 0.5(S_3 + S_6 - S_7)^2 - \exists b_1b_2)$$

$$\text{Eerste orde afgeleiden: } \frac{\partial L}{\partial S_3} = c_3 - \lambda(S_7 - S_3) = 0, \frac{\partial L}{\partial S_6} = c_6 - \lambda(S_7 - S_6) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_7} = c_7 - \lambda(S_3 + S_6 - S_7) = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = S_3S_6 - 0.5(S_3 + S_6 - S_7)^2 - \beta b_1b_2 = 0$$

Bepaling Range:

$$S_3 < b_1 \Rightarrow \sqrt{\beta b_1 b_2} * (c_6 + c_7) / a < b_1 \Rightarrow \beta < \frac{b_1}{b_2} * \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2$$

$$\text{met } a = \sqrt{(c_3 + c_7)(c_6 + c_7) - 0.5c_7^2}$$

$$S_6 < b_2 \Rightarrow \sqrt{\beta b_1 b_2} * (c_3 + c_7) / a < b_2 \Rightarrow \beta < \frac{b_2}{b_1} * \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2$$

3.2.2 Het Commonality Model CO (Range 2A)

$$\text{Min } T_{\text{CO}} = c_3b_1 + c_6S_6 + c_7S_7$$

Met opmerkingen [WJWA1]:

$$\text{s.t.} \quad \exists b_1 b_2 = b_1 S_6 - 0.5(b_1 + S_6 - S_7)^2 \\ S_6, S_7 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = c_3 b_1 + c_6 S_6 + c_7 S_7 - 8(b_1 S_6 - 0.5(b_1 + S_6 - S_7)^2 - \exists b_1 b_2)$$

$$\text{Eerste orde afgeleiden: } \frac{\partial L}{\partial S_6} = c_6 - \lambda(S_7 - S_6) = 0, \frac{\partial L}{\partial S_7} = c_7 - \lambda(b_1 + S_6 - S_7) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = b_1 S_6 - 0.5(b_1 + S_6 - S_7)^2 - \beta b_1 b_2 = 0$$

Bepaling range:

$$S_6 \leq b_2 \Rightarrow \frac{c_7^2 b_1}{2(c_6 + c_7)^2} + \beta b_2 \leq b_2 \Rightarrow \beta b_2 \leq b_2 - \frac{c_7^2 b_1}{2(c_6 + c_7)^2} \Rightarrow \beta \leq 1 - \frac{b_1}{b_2} * \frac{c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2}$$

3.2.3 Het Commonality Model (Range 2B)

$$\text{Min} \quad T_{CO} = c_3 S_3 + c_6 b_2 + c_7 S_7$$

$$\text{s.t.} \quad \exists b_1 b_2 = S_3 b_2 - 0.5(S_3 + b_2 - S_7)^2 \\ S_3, S_7 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = c_3 S_3 + c_6 b_2 + c_7 S_7 - 8(S_3 b_2 - 0.5(S_3 + b_2 - S_7)^2 - \exists b_1 b_2)$$

$$\text{Eerste orde afgeleiden: } \frac{\partial L}{\partial S_3} = c_3 - \lambda(S_7 - S_3) = 0, \frac{\partial L}{\partial S_7} = c_7 - \lambda(S_3 + b_2 - S_7) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = S_3 b_2 - 0.5(S_3 + b_2 - S_7)^2 - \beta b_1 b_2 = 0$$

Bepaling range:

$$S_3 < b_1 \Rightarrow \beta b_1 + \frac{c_7^2 b_2}{2(c_3 + c_7)^2} < b_1 \Rightarrow \beta b_1 < b_1 - \frac{c_7^2 b_2}{2(c_3 + c_7)^2} \Rightarrow \beta < 1 - \frac{b_2}{b_1} * \frac{c_7^2}{2(c_3 + c_7)^2}$$

3.2.4 Het Commonality Model (Range 3)

$$\text{Min} \quad T_{CO} = c_3 b_1 + c_6 b_2 + c_7 S_7$$

$$\text{s.t.} \quad \exists b_1 b_2 = b_1 b_2 - 0.5(b_1 + b_2 - S_7)^2 \\ S_7 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = c_3 b_1 + c_6 b_2 + c_7 S_7 - 8(b_1 b_2 - 0.5(b_1 + b_2 - S_7)^2 - \exists b_1 b_2)$$

$$\text{Eerste orde afgeleide: } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = b_1 b_2 - 0.5(b_1 + b_2 - S_7)^2 - \beta b_1 b_2 = 0$$

Ondergrens Range 3:

(1): Range 2A is de opvolger van Range 1,

$$\frac{b_1}{b_2} \left(\frac{a}{c_6 + c_7} \right)^2 < \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{a}{c_3 + c_7} \right)^2 \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2} \right) < \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{c_7^2}{2(c_3 + c_7)^2} \right) \Rightarrow$$

$$1 - \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2} \right) > 1 - \frac{b_2}{b_1} \left(\frac{c_7^2}{2(c_3 + c_7)^2} \right)$$

- (2): Range 2B is de opvolge van Range 1,
Nu moeten de ongelijkheidstekens in bovenstaande vergelijking omgewisseld worden. Hieruit volgt nu dat de bovengrens van Range 2 (A of B), die relevant is, groter is dan de niet relevante bovengrens van de andere Range 2. Hieruit volgt nu de ondergrens voor Range 3: $\exists \# \max(\text{bovengrens 2A, bovengrens 2B})$

3.5.1 Het Commonality Model CGN (Range 1)

$$\text{Min } T_{\text{CGN}} = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7$$

$$\text{s.t. } \exists = (S_3 S_6 - 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_6 - S_7 + S_3)^2)/A$$

$$S_3, S_6, S_7 \geq 0$$

Lagrange functie:

$$L = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7 - 8(S_3 S_6 - 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_6 - S_7 + S_3)^2 - \exists A)$$

Eerste orde afgeleiden:

$$\frac{\partial L}{\partial S_3} = c_3 - \lambda(S_7 - S_3) = 0, \frac{\partial L}{\partial S_6} = c_6 - \lambda(S_7 - x) = 0, \frac{\partial L}{\partial S_7} = c_7 - \lambda(S_3 + S_6 - S_7) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = S_3 S_6 - 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_6 - S_7 + S_3)^2 - \beta A = 0$$

Bepaling range: $S_3 < b$, $S_6 < x$ en $S_7 < 2b - x$

3.5.2 Het Commonality Model CGN (Range 2A)

$$\text{Min } T_{\text{CGN}} = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7$$

$$\text{s.t. } \exists = (S_3 S_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - S_7 + S_3)^2)/A$$

$$S_3, S_6, S_7 \geq 0$$

$$\text{Lagrange functie: } L = c_3 S_3 + c_6 S_6 + c_7 S_7 - 8(S_3 S_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - S_7 + S_3)^2 - \exists A)$$

Eerste orde afgeleiden:

$$\frac{\partial L}{\partial S_3} = c_3 - \lambda(S_7 - S_3) = 0, \frac{\partial L}{\partial S_6} = c_6 - \lambda(S_7 + S_6) = 0, \frac{\partial L}{\partial S_7} = c_7 - \lambda(S_3 + S_6 - S_7) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = S_3 S_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - S_7 + S_3)^2 - \beta A = 0$$

Bepaling range: $S_3 < b$ en $S_7 < 2b - x$

3.5.3 Het Commonality Model CGN (Range 2B)

$$\text{Min } T_{\text{CGN}} = c_3b + c_6S_6 + c_7S_7$$

$$\text{s.t. } \exists = (bS_6 - 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_6 - S_7 + b)^2)/A \\ S_6, S_7 \geq 0$$

Lagrange functie:

$$L = c_3b + c_6S_6 + c_7S_7 - 8(bS_6 - 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_6 - S_7 + b)^2 - \lambda A)$$

$$\text{Eerste orde afgeleiden: } \frac{\partial L}{\partial S_6} = c_6 - \lambda(S_7 - x) = 0, \frac{\partial L}{\partial S_7} = c_7 - \lambda(b + S_6 - S_7) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = bS_6 - 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_6 - S_7 + b)^2 - \lambda A = 0$$

Bepaling range: $S_6 < x$ en $S_7 < 2b - x$

3.5.4 Het Commonality Model CGN (Range 2C)

$$\text{Min } T_{\text{CGN}} = c_3S_3 + c_6S_6 + c_7(2b - x)$$

$$\text{s.t. } \exists = (S_3S_6 - 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_6 - 2b + x + S_3)^2)/A \\ S_3, S_6 \geq 0$$

Lagrange functie:

$$L = c_3S_3 + c_6S_6 + c_7(2b - x) - 8(S_3S_6 - 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_6 - 2b + x + S_3)^2 - \lambda A)$$

$$\text{Eerste orde afgeleiden: } \frac{\partial L}{\partial S_3} = c_3 - \lambda(2b - x - S_3) = 0, \frac{\partial L}{\partial S_6} = c_6 - \lambda(2b - 2x) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = S_3S_6 - 0.5x^2 + 0.5(x - S_6)^2 - 0.5(S_6 - 2b + x + S_3)^2 - \lambda A = 0$$

Bepaling range: $S_6 < x$

3.5.5 Het Commonality Model CGN (Range 3A)

$$\text{Min } T_{\text{CGN}} = c_3S_3 + c_6S_6 + c_7(2b - x)$$

$$\text{s.t. } \exists = (S_3S_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - 2b + x + S_3)^2)/A \\ S_3, S_6 \geq 0$$

Lagrange functie:

$$L = c_3S_3 + c_6S_6 + c_7(2b - x) - 8(S_3S_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - 2b + x + S_3)^2 - \lambda A)$$

$$\text{Eerste orde afgeleiden: } \frac{\partial L}{\partial S_3} = c_3 - \lambda(2b - x - S_3) = 0, \frac{\partial L}{\partial S_6} = c_6 - \lambda(2b - x - S_6) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = S_3S_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - 2b + x + S_3)^2 - \lambda A = 0$$

Bepaling range: $S_3 < b$

3.5.6 Het Commonality Model CGN (Range 3B)

$$\text{Min } T_{\text{CGN}} = c_3b + c_6S_6 + c_7S_7$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} \exists &= (S_3S_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - S_7 + S_3)^2)/A \\ S_6, S_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Lagrange functie: } L = c_3b + c_6S_6 + c_7S_7 - 8(S_3S_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - S_7 + S_3)^2 - \exists A)$$

Eerste orde afgeleiden:

$$\frac{\partial}{\partial S_6} = c_6 - \lambda(S_7 - S_6) = 0, \frac{\partial}{\partial S_7} = c_7 - \lambda(b + S_6 - S_7) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = bS_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - S_7 + S_3)^2 - \beta A = 0$$

Bepaling range: $S_6 < b$ en $S_7 < 2b-x$

3.5.7 Het Commonality Model CGN (Range 3C)

$$\text{Min } T_{\text{CGN}} = c_3b + c_6S_6 + c_7(2b-x)$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} \exists &= (bS_6 - 0.5x^2 + 0.5(x-S_6)^2 - 0.5(S_6 - b + x)^2)/A \\ S_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lagrange functie:

$$L = c_3b + c_6S_6 + c_7(2b-x) - 8(bS_6 - 0.5x^2 + 0.5(x-S_6)^2 - 0.5(S_6 - b + x)^2 - \exists A)$$

$$\text{Eerste orde afgeleide: } \frac{\partial}{\partial \lambda} = bS_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - S_7 + S_3)^2 - \beta A = 0$$

Bepaling range: $S_6 < x$

3.5.8 Het Commonality Model CGN (Range 4B)

$$\text{Min } T_{\text{CGN}} = (c_3 + c_6)b + c_7S_7$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} \exists &= (b^2 - 0.5x^2 - 0.5(2b-S_7)^2)/A \\ S_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Lagrange functie: } L = (c_3 + c_6)b + c_7S_7 - 8(b^2 - 0.5x^2 - 0.5(2b-S_7)^2 - \exists A)$$

$$\text{Eerste orde afgeleide: } \frac{\partial}{\partial \lambda} = b^2 - 0.5x^2 - 0.5(2b - S_7)^2 - \beta A = 0$$

3.5.9 Het Commonality Model CGN (Range 4A)

$$\text{Min } T_{\text{CGN}} = c_3b + c_6S_6 + c_7(2b-x)$$

$$\text{s.t. } \begin{aligned} \exists &= (bS_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - b + x)^2)/A \\ S_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Lagrange functie: } L = c_3b + c_6S_6 + c_7(2b-x) - \lambda(bS_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - b + x)^2 - \exists A)$$

$$\text{Eerste orde afgeleide: } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = bS_6 - 0.5x^2 - 0.5(S_6 - b + x)^2 - \lambda A = 0$$

3.5.10 Het Commonality Model CGN (Range 5)

$$\text{Min } T_{\text{CGN}} = c_3b + c_6b + c_7(2b-x)$$

$$\text{s.t. } \exists = 1$$

4.2.1 Het Double Commonality Model DO (Range 1)

$$\text{Min } T_{\text{DO}} = (c_7 + c_8)S_7$$

$$\text{s.t. } \exists = 0.5S_7^2/b_1b_2$$

$$\begin{aligned} \text{Bepaling range: } S_7 < b_1 &\Rightarrow \sqrt{2\beta b_1 b_2} < b_1 \Rightarrow 2\beta b_1 b_2 < b_1^2 \Rightarrow \beta < b_1 / 2b_2 \\ S_7 < b_2 &\Rightarrow \sqrt{2\beta b_1 b_2} < b_2 \Rightarrow 2\beta b_1 b_2 < b_2^2 \Rightarrow \beta < b_2 / 2b_1 \end{aligned}$$

4.2.2 Het Double Commonality Model DO (Range 2A)

$$\text{Min } T_{\text{DO}} = (c_7 + c_8)S_7$$

$$\text{s.t. } \exists = (0.5S_7^2 - 0.5(S_7 - b_1)^2)/b_1b_2$$

$$\text{Bepaling range: } S_7 < b_2 \Rightarrow 0.5b_1 + \beta b_2 < b_2 \Rightarrow \beta b_2 < b_2 - 0.5b_1 \Rightarrow \beta < 1 - b_1 / 2b_2$$

4.2.3 Het Double Commonality Model DO (Range 2B)

$$\text{Min } T_{\text{DO}} = (c_7 + c_8)S_7$$

$$\text{s.t. } \exists = (0.5S_7^2 - 0.5(S_7 - b_2)^2)/b_1b_2$$

$$\text{Bepaling range: } S_7 < b_1 \Rightarrow \beta b_1 + 0.5b_2 < b_1 \Rightarrow \beta b_1 < b_1 - 0.5b_2 \Rightarrow \beta < 1 - b_2 / 2b_1$$

4.2.4 Het Double Commonality Model DO (Range 3)

$$\text{Min } T_{\text{DO}} = (c_7 + c_8)S_7$$

$$\text{s.t. } \exists = (0.5S_7^2 - 0.5(S_7 - b_2)^2 - 0.5(S_7 - b_1)^2)/b_1b_2$$

Voor het afleiden van de ondergrens van Range 3 valt een soortgelijke analyse op te zetten als bij het Commonality Model CO.

4.5.1 Het Double Commonality Model DGN (Range 1)

$$\text{Min } T_{DO} = (c_7 + c_8)S_7$$

$$\text{s.t. } \exists = (0.5S_7^2 - 0.5x^2)/A$$

$$\text{Bepaling range: } S_7 < b \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2\beta A} < b \Rightarrow x^2 + 2\beta A < b^2 \Rightarrow \beta < (b^2 - x^2)/2A$$

4.5.2 Het Double Commonality Model DGN (Range 2)

$$\text{Min } T_{DO} = (c_7 + c_8)S_7$$

$$\text{s.t. } \exists = (0.5S_7^2 - 0.5x^2 - (S_7 - b)^2)/A$$

Appendix B: Kostenberekeningen

5.1 Kostenvergelijking Basismodellen

Eigenschap 5.1.1:

$$T_{CO} > T_{BO} \text{ als } a^2 > (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)$$

Range 1 bij CO en Range 1 bij BO:

$$dT_{CO} / d\beta = \sqrt{b_1 b_2 / \beta} * a \text{ en } dT_{BO} / d\beta = \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) / \beta}$$

$$dT_{CO} / d\beta > dT_{BO} / d\beta \text{ als } a^2 > (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)$$

Range 1 bij CO en Range 2A bij BO:

$$dT_{CO} / d\beta = \sqrt{b_1 b_2 a^2 / \beta} > \sqrt{b_1 b_2 a^2 / \left(\frac{b_1}{b_2} * \frac{a^2}{(c_6 + c_7)^2} \right)} = b_2 (c_6 + c_7) > b_2 (c_5 + c_6) = dT_{BO} / d\beta$$

Range 1 bij CO en Range 2B bij BO:

$$dT_{CO} / d\beta = \sqrt{b_1 b_2 a^2 / \beta} >^1 \sqrt{b_1 b_2 a^2 / \left(\frac{b_2}{b_1} * \frac{a^2}{(c_3 + c_7)^2} \right)} = b_1 (c_3 + c_7) >^2 b_1 (c_3 + c_4) = dT_{BO} / d\beta$$

Range 2A bij CO en Range 1 bij BO:

$$dT_{CO} / d\beta = b_2 (c_6 + c_7) = \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) / \frac{b_1 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}{b_2 (c_6 + c_7)^2}} > \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) * \frac{b_1}{b_2} * \frac{a^2}{(c_6 + c_7)^2}} >^1 \sqrt{\frac{b_1 b_2}{\beta} (c_3 + c_4)(c_5 + c_6)} = dT_{BO} / d\beta$$

Range 2A bij CO en Range 2A bij BO:

$$dT_{CO} / d\beta = b_2 (c_6 + c_7) > b_2 (c_5 + c_6) = dT_{BO} / d\beta$$

Range 2A bij CO en Range 2B bij BO:

$$dT_{CO} / d\beta = b_2 (c_6 + c_7) >^1 b_1 (c_3 + c_7) > b_1 (c_3 + c_4) = dT_{BO} / d\beta$$

$$(1) \frac{b_1}{b_2} * \frac{a^2}{(c_6 + c_7)^2} < \frac{b_2}{b_1} * \frac{a^2}{(c_3 + c_7)^2} \Rightarrow b_2^2 (c_6 + c_7)^2 > b_1^2 (c_3 + c_7)^2 \\ \Rightarrow b_2 (c_6 + c_7) > b_1 (c_3 + c_7)$$

Range 2B bij CO en Range 1 bij BO:

$$dT_{CO} / d\beta = b_1 (c_3 + c_7) = \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) / \frac{b_2}{b_1} * \frac{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}{(c_3 + c_7)^2}} > \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) * \frac{b_2}{b_1} * \frac{a^2}{(c_3 + c_7)^2}} > \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) / \beta} = dT_{BO} / d\beta$$

Range 2B bij CO en Range 2A bij BO:

$$dT_{CO} / d\beta = b_1(c_3 + c_7) >^1 b_2(c_6 + c_7) > b_2(c_5 + c_6) = dT_{BO} / d\beta$$

$$(1) \frac{b_1}{b_2} * \frac{a^2}{(c_6 + c_7)^2} > \frac{b_2}{b_1} * \frac{a^2}{(c_3 + c_7)^2} \Rightarrow b_2^2(c_6 + c_7)^2 < b_1^2(c_3 + c_7)^2 \\ \Rightarrow b_2(c_6 + c_7) < b_1(c_3 + c_7)$$

Range 2B bij CO en Range 2B bij BO:

$$dT_{CO} / d\beta = b_1(c_3 + c_7) > b_1(c_3 + c_4) = dT_{BO} / d\beta$$

Range 3 bij CO en Range 1 bij BO:

(1) Range 3 is de opvolger van Range 2B bij CO:

In dit geval geldt: $b_2(c_6 + c_7) < b_1(c_3 + c_7)$.

$$\beta \geq 1 - \frac{b_2}{b_1} \frac{c_7^2}{2(c_3 + c_7)^2} = 1 - \frac{c_7^2}{2(c_3 + c_7)^2 * b_1 / b_2} > 1 - \frac{c_7^2}{2(c_3 + c_7)(c_6 + c_7)} \Leftrightarrow$$

$$\beta \geq \frac{2a^2}{2a^2 + c_7^2} \Leftrightarrow c_7^2 \beta + 2a^2 \beta > 2a^2 \Leftrightarrow 2a^2(1 - \beta) < c_7^2 \beta \Leftrightarrow$$

$$a\sqrt{2(1 - \beta)} < c_7 \sqrt{\beta} \Leftrightarrow a / \sqrt{\beta} < c_7 / \sqrt{2(1 - \beta)}$$

$$dT_{CO} / d\beta = \frac{c_7 \sqrt{b_1 b_2}}{\sqrt{2(1 - \beta)}} > \sqrt{b_1 b_2 / \beta} * a > \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) / \beta} = dT_{BO} / d\beta$$

(2) Range 3 is de opvolger van Range 2A bij CO:

In dit geval geldt: $b_1(c_3 + c_7) < b_2(c_6 + c_7)$.

$$\beta \geq 1 - \frac{b_1}{b_2} \frac{c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2} = 1 - \frac{c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2 * b_2 / b_1} > 1 - \frac{c_7^2}{2(c_3 + c_7)(c_6 + c_7)}$$

Hierna verloopt het bewijs identiek als bij (1).

Range 3 bij CO en Range 2A bij BO:

$$dT_{CO} / d\beta = \frac{c_7 b_1 b_2}{\sqrt{2(1 - \beta) b_1 b_2}} > \frac{c_7 b_1 b_2}{\sqrt{2(1 - 1 + \frac{b_1}{b_2} * \frac{c_7^2}{2(c_3 + c_7)^2})}} = \frac{c_7 b_1 b_2}{\sqrt{\frac{b_1^2 c_7^2}{(c_6 + c_7)^2}}} =$$

$$b_2(c_6 + c_7) > b_2(c_5 + c_6) = dT_{BO} / d\beta$$

Range 3 bij CO en Range 2B bij BO:

$$dT_{CO} / d\beta = \frac{c_7 b_1 b_2}{\sqrt{2(1 - \beta) b_1 b_2}} > \frac{c_7 b_1 b_2}{\sqrt{2(1 - 1 + \frac{b_2}{b_1} * \frac{c_7^2}{2(c_6 + c_7)^2})}} = \frac{c_7 b_1 b_2}{\sqrt{\frac{b_2^2 c_7^2}{(c_3 + c_7)^2}}} =$$

$$b_1(c_3 + c_7) > b_1(c_3 + c_4) = dT_{BO} / d\beta$$

Eigenschap 5.1.2:

$$T_{DO} > T_{BO} \text{ als } c_7 + c_8 > \sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6)}$$

Range 1 bij DO en Range 1 bij BO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) \sqrt{b_1 b_2 / 2\beta} > \sqrt{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) b_1 b_2 / \beta} = dT_{BO} / d\beta$$

Range 1 bij DO en Range 2A bij BO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) \sqrt{b_1 b_2 / 2\beta} > (c_7 + c_8) \sqrt{b_1 b_2 / \frac{2b_1}{2b_2}} = (c_7 + c_8) b_2 > (c_5 + c_6) b_2 = dT_{BO} / d\beta$$

Range 1 Bij DO en Range 2B bij BO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) \sqrt{b_1 b_2 / 2\beta} > (c_7 + c_8) \sqrt{b_1 b_2 / \frac{2b_2}{2b_1}} = (c_7 + c_8) b_1 > (c_3 + c_4) b_1 = dT_{BO} / d\beta$$

Range 2A bij DO en Range 1 bij BO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) b_2 > \sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) b_2} = \sqrt{2b_2^2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) b_1 / b_1} > \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) / \beta} = dT_{BO} / d\beta$$

Range 2A bij DO en Range 2A bij BO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) b_2 > (c_5 + c_6) b_2 = dT_{BO} / d\beta$$

Range 2A bij DO en Range 2B bij BO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) b_2 > (c_7 + c_8) b_1 > (c_3 + c_4) b_1 = dT_{BO} / d\beta$$

Range 2B bij DO en Range 1 bij BO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) b_1 > \sqrt{2(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) b_1} = \sqrt{2b_1^2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) b_2 / b_2} > \sqrt{b_1 b_2 (c_3 + c_4)(c_5 + c_6) / \beta} = dT_{BO} / d\beta$$

Range 2B bij DO en Range 2A bij BO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) b_1 > (c_7 + c_8) b_2 > (c_5 + c_6) b_2 = dT_{BO} / d\beta$$

Range 2B bij DO en Range 2B bij BO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) b_1 > (c_3 + c_4) b_1 = dT_{BO} / d\beta$$

Range 3 bij DO en Range 1 bij BO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) \sqrt{\frac{b_1 b_2}{2(1-\beta)}} > \sqrt{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) b_1 b_2 / (1-\beta)} >^1 \sqrt{(c_3 + c_4)(c_5 + c_6) b_1 b_2 / \beta} = dT_{BO} / d\beta$$

- (1) Bij Range 3 van het DO model geldt: $\exists \exists \max(1 - b_1/2b_2, 1 - b_2/2b_1)$
 Als $b_1 < b_2$ dan: $b_1 < b_2 \Rightarrow b_1/2b_2 < b_2/2b_2 \Rightarrow b_1/2b_2 < 1/2 \Rightarrow 1 - b_1/2b_2 > 1/2$
 Als $b_2 < b_1$ dan: $b_2 < b_1 \Rightarrow b_2/2b_1 < b_1/2b_1 \Rightarrow b_2/2b_1 < 1/2 \Rightarrow 1 - b_2/2b_1 > 1/2$
 Hieruit volgt dus dat $\exists > 0.5$. Dus $1-\exists < \exists$

Range 3 bij DO en Range 2A bij BO:

$$dT_{DO} / d\beta = \frac{(c_7 + c_8)b_1b_2}{\sqrt{2(1-\beta)b_1b_2}} > \frac{(c_7 + c_8)b_1b_2}{\sqrt{2b_1^2b_2 / 2b_2}} = (c_7 + c_8)b_2 > (c_5 + c_6)b_2 = dT_{BO} / d\beta$$

Range 3 bij DO en Range 2B bij BO:

$$dT_{DO} / d\beta = \frac{(c_7 + c_8)b_1b_2}{\sqrt{2(1-\beta)b_1b_2}} > \frac{(c_7 + c_8)b_1b_2}{\sqrt{2b_2^2b_1 / 2b_1}} = (c_7 + c_8)b_1 > (c_3 + c_4)b_1 = dT_{BO} / d\beta$$

Eigenschap 5.1.3:

$$T_{DO} > T_{BO} \text{ als } c_7 + c_8 > \sqrt{2(c_3 + c_7)(c_6 + c_7) - c_7^2}$$

Range 1 bij DO en Range 1 bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8)\sqrt{b_1b_2 / 2\beta} > \sqrt{b_1b_2 / \beta} * a = dT_{CO} / d\beta$$

Range 1 bij DO en Range 2A bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8)\sqrt{b_1b_2 / 2\beta} > (c_7 + c_8)\sqrt{b_1b_2 / \frac{2b_1}{2b_2}} = (c_7 + c_8)b_2 > (c_6 + c_7)b_2 = dT_{CO} / d\beta$$

Range 1 bij DO en Range 2B bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8)\sqrt{b_1b_2 / 2\beta} > (c_7 + c_8)\sqrt{b_1b_2 / \frac{2b_2}{2b_1}} = (c_7 + c_8)b_1 > (c_3 + c_7)b_1 = dT_{BO} / d\beta$$

Range 1 bij DO en Range 3 bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8)\sqrt{\frac{b_1b_2}{2\beta}} > c_7\sqrt{\frac{b_1b_2}{2\beta}} >^1 c_7\sqrt{\frac{b_1b_2}{2(1-\beta)}} = dT_{CO} / d\beta$$

- (1) Bij Range 1 in DO geldt: $\exists < 1/2$ (bewezen bij Range 3 DO en Range 1 BO)
Hieruit volgt: $\exists < 1 - \exists$.

Range 2A bij DO en Range 1 bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8)b_2 > \sqrt{2(c_3 + c_7)(c_6 + c_7) - c_7^2} * b_2 = \sqrt{2a^2b_2^2} = \sqrt{b_1b_2a^2 / \frac{b_1}{2b_2}} > \sqrt{b_1b_2a^2 / \beta} = dT_{CO} / d\beta$$

Range 2A bij DO en Range 2A bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8)b_2 > (c_6 + c_7)b_2 = dT_{CO} / d\beta$$

Range 2A bij DO en Range 2B bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8)b_2 > (c_7 + c_8)b_1 > (c_3 + c_7)b_1 = dT_{CO} / d\beta$$

Range 2A bij DO en Range 3 bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8)b_2 > c_7 \sqrt{b_2^2} = c_7 \sqrt{\frac{b_2^2 b_1}{b_1}} = c_7 \sqrt{\frac{b_1 b_2}{b_1 / b_2}} = c_7 \sqrt{\frac{b_1 b_2}{2(1 - 1 + b_2 / 2b_1)}} >$$

$$c_7 \sqrt{\frac{b_1 b_2}{2(1 - \beta)}} = dT_{CO} / d\beta$$

Range 2B bij DO en Range 1 bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8)b_1 > \sqrt{2(c_3 + c_7)(c_6 + c_7) - c_7^2} * b_1 = \sqrt{2a^2 b_1^2} = \sqrt{b_1 b_2 a^2 / \frac{b_2}{2b_1}} >$$

$$\sqrt{b_1 b_2 a^2 / \beta} = dT_{CO} / d\beta$$

Range 2B bij DO en Range 2A bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8)b_1 > (c_7 + c_8)b_2 > (c_3 + c_7)b_2 = dT_{CO} / d\beta$$

Range 2B bij DO en Range 2B bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8)b_1 > (c_3 + c_7)b_1 = dT_{CO} / d\beta$$

Range 2B bij DO en Range 3 bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8)b_1 = (c_7 + c_8)\sqrt{b_1^2} > c_7 \sqrt{b_1^2} = c_7 \sqrt{b_1^2 b_2 / b_2} = c_7 \sqrt{\frac{b_1 b_2}{2(1 - 1 + b_2 / 2b_1)}} >$$

$$> c_7 \sqrt{b_1 b_2 / (2(1 - \beta))} = dT_{CO} / d\beta$$

Range 3 bij DO en Range 1 bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) \sqrt{\frac{b_1 b_2}{2(1 - \beta)}} > \sqrt{2a^2 b_1 b_2 / 2(1 - \beta)} = a \sqrt{b_1 b_2 / (1 - \beta)} >^1 a \sqrt{b_1 b_2 / \beta} = dT_{CO} / d\beta$$

(1) Zelfde redenering als bij Range 3 DO en Range 1 BO.

Range 3 bij DO en Range 2A bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) \sqrt{\frac{b_1 b_2}{2(1 - \beta)}} > (c_7 + c_8) \sqrt{b_1 b_2 / 2(1 - 1 + b_1 / 2b_2)} = (c_7 + c_8)b_2 >$$

$$(c_6 + c_7)b_2 = dT_{CO} / d\beta$$

Range 3 bij DO en Range 2B bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) \sqrt{\frac{b_1 b_2}{2(1 - \beta)}} > (c_7 + c_8) \sqrt{b_1 b_2 / 2(1 - 1 + b_2 / 2b_1)} = (c_7 + c_8)b_1 >$$

$$(c_3 + c_7)b_1 = dT_{CO} / d\beta$$

Range 3 bij DO en Range 3 bij CO:

$$dT_{DO} / d\beta = (c_7 + c_8) \sqrt{\frac{b_1 b_2}{2(1 - \beta)}} > c_7 \sqrt{\frac{b_1 b_2}{2(1 - \beta)}} = dT_{CO} / d\beta$$

6.1 Kostenvoorbeeld met ongecorreleerde vraag

Eigenschap 6.1.1.:

Invullen van voorwaarden in Eigenschap 5.1.1 t.m 5.1.3 geeft:

$$c_7 > \sqrt{(c+c)^2 + 2(c^2 + c^2 + c^2)} - 2c \Rightarrow c_7 > \sqrt{10c^2} - 2c \Rightarrow c_7 > (\sqrt{10} - 2)c$$

$$2c_7 > \sqrt{2(2c)(2c)} \Rightarrow 2c_7 > \sqrt{8c^2} \Rightarrow c_7 > \sqrt{2}c$$

$$2c_7 > \sqrt{2(c+c_7)(c+c_7)} - c_7^2 \Rightarrow 4c_7^2 > 2(c+c_7)^2 - c_7^2 \Rightarrow 3c_7^2 > 2c^2 + 4c_7c \Rightarrow c_7 > (4 + \sqrt{40})c/6$$

Eigenschap 6.1.2.:

Invullen van voorwaarden in Eigenschap 5.1.1 geeft:

$$c_7 > \sqrt{(c_u + c_u)^2 + 2(c_c c_u + c_c^2 + c_c c_u)} - (c_u + c_u) \Rightarrow c_7 > \sqrt{4c_u^2 + 2c_c^2 + 4c_c c_u} - 2c_u$$

Appendix C: Matlabprogramma's

function fig50 = fig50(b,c)

% Relatie tussen beta en alfa voor het Basismodel en Commonality Model met
% ongecorreleerde vraag

```
i=1;
for beta2=800:1000
    beta = beta2/1000;
    for alfa2=1000:1200
        alfa= alfa2/1000;

        TBO = 4*b*c*sqrt(beta);

        if beta < 1 - 0.5*((alfa*c)/(c+alfa*c))^2
            TCO = 2*b*sqrt(beta)*sqrt((c+alfa*c)^2 - 0.5*(alfa*c)^2);

        else if beta > 1 - 0.5*((alfa*c)/(c+alfa*c))^2
            TCO = 2*b*(c+alfa*c) - b*c*alfa*sqrt(2*(1-beta));

        end
        end
        if TBO <= TCO
            gelijk(i,1) = [beta];
            gelijk(i,2) = [alfa];
            i=i+1;
        end
    end
end
plot(gelijk(:,2),gelijk(:,1),'w.')
xlabel('alfa')
ylabel('beta')
```

function fig51 = fig51(b,c)

% Relatie tussen beta en alfa voor het Basismodel en Double Commonality Model met
% ongecorreleerde vraag

```
i=1;
for beta2=200:500
    beta = beta2/500;
    for alfa2=500:750
        alfa= alfa2/500;

        TBO = 4*b*c*sqrt(beta);

        if beta < 0.5
            TDO = 2*b*c*alfa*sqrt(2*beta);

        else if beta >= 0.5
            TDO = 2*b*c*alfa*(2-sqrt(2*(1-beta)));

        end
        end
        if TBO <= TDO
            gelijk(i,1) = [beta];
            gelijk(i,2) = [alfa];
            i=i+1;
        end
    end
end
```

```

end
end
plot(gelijk(:,2),gelijk(:,1),'w.')
xlabel('alfa')
ylabel('beta')

function fig52 = fig52(b,c)

% Relatie tussen beta en alfa voor het Commonality Model en Double Commonality Model met
% ongecorreleerde vraag

i=1;
for beta2=100:250
    beta = beta2/250;
for alfa2=250:4590
    alfa= alfa2/250;

if (beta < 1 - 0.5*((alfa*c)/(c+alfa*c))^2) & (beta < 0.5)
    TCO = 2*b*sqrt(beta)*sqrt((c+alfa*c)^2 - 0.5*(alfa*c)^2);
    TDO = 2*b*c*alfa*sqrt(2*beta);

else if (beta < 1 - 0.5*((alfa*c)/(c+alfa*c))^2) & (beta >= 0.5)
    TCO = 2*b*sqrt(beta)*sqrt((c+alfa*c)^2 - 0.5*(alfa*c)^2);
    TDO = 2*b*c*alfa*(2-sqrt(2*(1-beta)));

else if (beta >= 1 - 0.5*((alfa*c)/(c+alfa*c))^2) & (beta < 0.5)
    TCO = 2*b*(c+alfa*c) - b*c*alfa*sqrt(2*(1-beta));
    TDO = 2*b*c*alfa*sqrt(2*beta);

else if (beta >= 1 - 0.5*((alfa*c)/(c+alfa*c))^2) & (beta >= 0.5)
    TCO = 2*b*(c+alfa*c) - b*c*alfa*sqrt(2*(1-beta));
    TDO = 2*b*c*alfa*(2-sqrt(2*(1-beta)));

end
end
end
end
if TCO <= TDO
    gelijk(i,1) = [beta];
    gelijk(i,2) = [alfa];
    i=i+1;
end
end
end
plot(gelijk(:,2),gelijk(:,1),'w.')
xlabel('alfa')
ylabel('beta')

function fig53 = fig53(b)

% Relatie tussen c7/cc en cu/cc voor het Basismodel en het Commonality
% Model. Tevens Figuur 6 uit Hillier (1999)

cc=1;
beta=0.85;
i=1;
for c72=200:280
    c7 = c72/200;
for cu2=10:100
    cu = cu2/1000;

```

```

TBO = 2*b*(cc+cu)*sqrt(beta);

if beta < 1 - 0.5*(c7/(cu+c7))^2
    TCO = 2*b*sqrt(beta)*sqrt((cu+c7)^2-0.5*(c7)^2);

else if beta >= 1 - 0.5*(c7/(cu+c7))^2
    TCO = 2*b*(cu+c7) - b*c7*sqrt(2*(1-beta));

end
end
if TBO <= TCO
    gelijk(i,1) = [c7/cc];
    gelijk(i,2) = [cu/cc];
    i=i+1;
end
end
end

for c72=200:280
    c7 = c72/200;
for cu2=10:100
    cu = cu2/100;

TBO = 2*b*(cc+cu)*sqrt(beta);

if beta < 1 - 0.5*(c7/(cu+c7))^2
    TCO = 2*b*sqrt(beta)*sqrt((cu+c7)^2-0.5*(c7)^2);

else if beta >= 1 - 0.5*(c7/(cu+c7))^2
    TCO = 2*b*(cu+c7) - b*c7*sqrt(2*(1-beta));

end
end
if TBO <= TCO
    gelijk(i,1) = [c7/cc];
    gelijk(i,2) = [cu/cc];
    i=i+1;
end
end
end

for c72=200:280
    c7 = c72/200;
for cu2=10:100
    cu = cu2/100;

TBO = 2*b*(cc+cu)*sqrt(beta);

if beta < 1 - 0.5*(c7/(cu+c7))^2
    TCO = 2*b*sqrt(beta)*sqrt((cu+c7)^2-0.5*(c7)^2);

else if beta >= 1 - 0.5*(c7/(cu+c7))^2
    TCO = 2*b*(cu+c7) - b*c7*sqrt(2*(1-beta));

end
end
if TBO <= TCO
    gelijk(i,1) = [c7/cc];
    gelijk(i,2) = [cu/cc];

```

```

    i=i+1;
end
end
end

for c72=200:280
    c7 = c72/200;
    for cu2=10:100
        cu = cu2/1;

        TBO = 2*b*(cc+cu)*sqrt(beta);

        if beta < 1 - 0.5*(c7/(cu+c7))^2
            TCO = 2*b*sqrt(beta)*sqrt((cu+c7)^2-0.5*(c7)^2);

        else if beta >= 1 - 0.5*(c7/(cu+c7))^2
            TCO = 2*b*(cu+c7) - b*c7*sqrt(2*(1-beta));

        end
    end
    if TBO <= TCO
        gelijk(i,1) = [c7/cc];
        gelijk(i,2) = [cu/cc];
        i=i+1;
    end
end
end

semilogx(gelijk(:,2),gelijk(:,1),'w.')
xlabel('cu/cc')
ylabel('c7/cc')

```